

ІОГ. ФРИДЕРИКА ВЕЙДЛЕРА

АНАЛИТИКА,

ИЛИ

АЛГЕБРА,

переведенная

съ

ЛАТИНСКАГО ЯЗЫКА

МАГИСТРОМЪ

Дмитріемъ Аничковымъ,

новое изданіе

исправленное и дополненное

МАГИСТРОМЪ

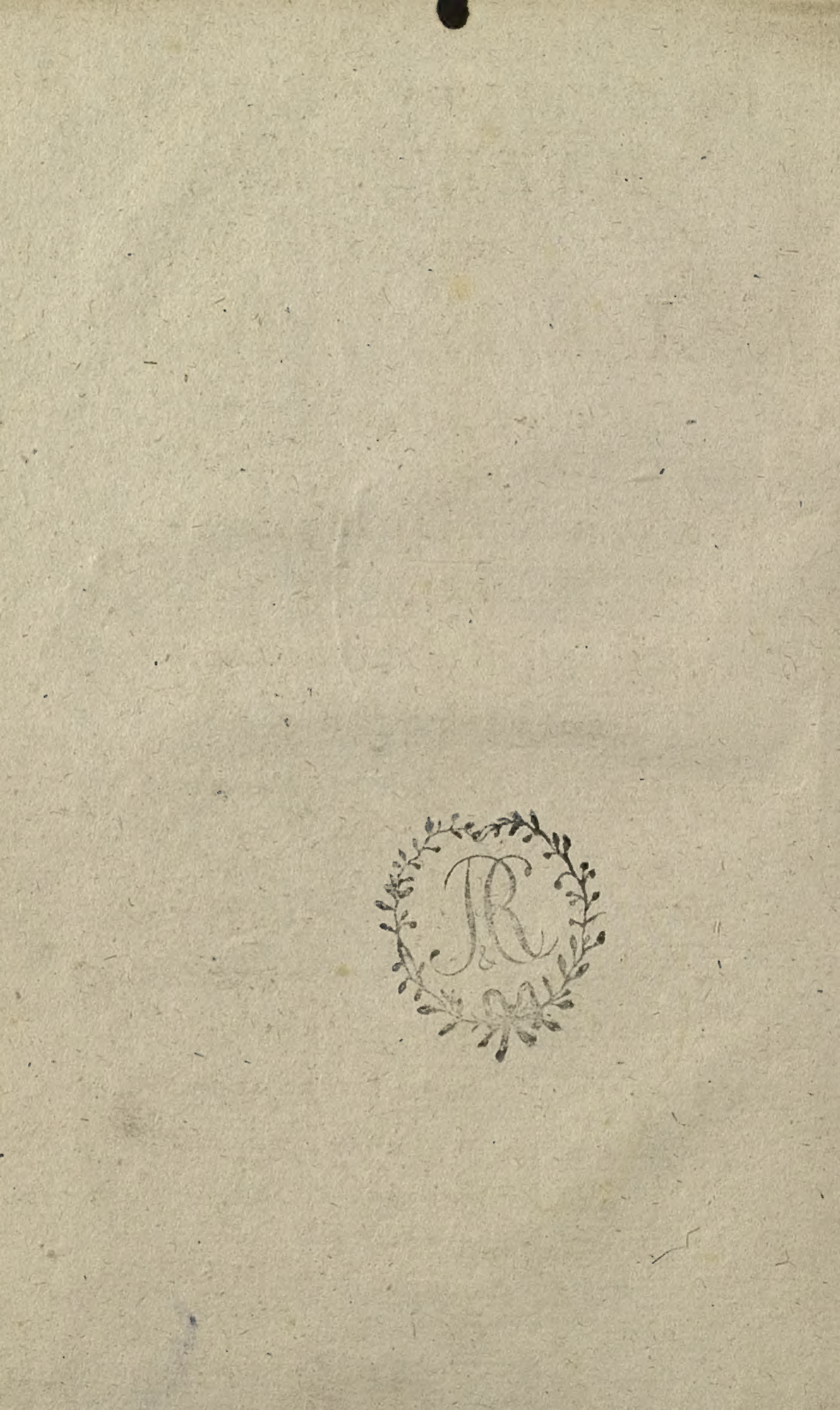
Александромъ Барсовымъ.

МОСКВА,

въ Университетской Типографіи,

у Хр. Ридигера и Хр. Клаудія,

1795.





АНАЛИТИКА, ИЛИ АЛГЕБРА.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

О литеральномъ исчисленіи.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ I.

§. 1.

Аналитика (Analyſis) есть наука, изъ данныхъ, или извѣстныхъ нѣкоторыхъ количествъ, находить неизвѣстныя, помощію сравненія.

ПРИМѢЧАНІЕ 1.

§. 2. *Аналитика Спеціоза* (ſpecioſa) называется по тому, что въ ней роды, или виды вещей (ſpecies) означаются литерами, которыя въ Аналитику первой ввелъ Францискъ Віета; Алгеброюжъ назвали оную Аравляне. Исторію объ Алгебрѣ пространно изъясняетъ Іоаннъ Валлизій, въ тр. истор. и практ. том. II. сочин. издан. въ Оксфортѣ, 1693 года на Латин. См. притомъ Гаррис. Лекс. Технич. Алгебр. Прежде, сколь-

ко извѣстно, имѣлъ понятіе о такой Аналитикѣ Діофантъ Александрійской, писатель втораго, или третьяго вѣка, котораго въ свѣтѣ находятся VI книгъ Ариѳметическихъ, съ комментаріями Бахета и Фермація, изданныя въ Парижѣ 1621, и въ Тулузѣ 1670 год. Въ Европѣ возстановилъ оную Лука де Бурго, въ сочиненіи своемъ, названномъ Summa de Arithmetica et Geometria, на Италіанскомъ языкѣ, издан. въ Венецїи 1494 и 1523 год. Обработывать ее продолжали Іеронъ Карданъ, и Михаилъ Стифелій; а размножили и распространили оную, сверьхъ прочихъ, Франц. Віета, Ѳома Гарріотъ, Картезій, Исаакъ Невтонъ, Лейбницій, Яковъ и Іо. Бернулли, Маркизъ де л' Опиталь и пр. О другихъ Аналитикахъ говорено будетъ въ лекціяхъ. Начинающимъ же учиться полезно имѣть слѣдующихъ Авторовъ: Эразма Бартолина *основанія всеобщей Математики*, издан. въ Амстердамѣ 1659 год. на Латинскомъ; Берн. Лами *основанія Математическія* на Фран. языкѣ; Исаака Невтона *всеобщую Ариѳметику*. Лат. а для дальнѣйшаго познанія Аналитическихъ способовъ можно имѣть Карла Рено *доказанную Аналитику* на Франц. языкѣ, издан. въ Парижѣ 1708 год. и Христіана Волфія *начальныя основанія Математической Аналитики*, на Латин. языкѣ том. I. Матем. основан. Маклорина *трактатъ объ Алгебрѣ*, Лонд. 1748. 8 на Агл. языкѣ; Зегнера *начальныя основанія Аналитики*, Гал. 1763, на Лат. и Кестнера *начальныя Аналитики основанія*, Гет. 1760, на Нѣм. языкѣ.

ПРИМѢЧАНІЕ 2.

§. 3. Знаки равенства, сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія тѣжъ, какіе въ Ариѳметикѣ показаны были (=, +, —, ×, :) и здѣсь употребляются. Ежелижъ множимыя числа, или дѣлитель,

тель, или дѣлимое число, будутъ состоять изъ многихъ литеръ, то составленное изъ нихъ количество пишется въ скобкахъ. На пр. $(a+b).d$, значитъ, что $a+b$ умножено на d, также $(a+b):d$, значитъ, что $a+b$ должно раздѣлить на d.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ II.

§. 4. Количества, предъ которыми ставится знакъ $+$, и которыя одни, или въ началѣ будучи поставлены, не имѣютъ того знака, называются *положительныя* (positiva), или *подтвердительныя* (affirmativa), а предъ которыми находится знакъ $-$, тѣ *недостаточныя* (privativa), или *отрицательныя* (negativa) именуются. Первыя изъ нихъ означаютъ самую вещь, а послѣднія недостатокъ вещи. Недостаточныя количества весьма пристойно сравниваются съ долгомъ, и потому меньше нежели ничего, а положительныя, такъ какъ имѣніе, больше нежели ничего почитаются.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 5. Чего ради, когда будетъ придано недостаточное количество къ положительному, тогда уменьшится положительное количество; а когда недостаточное количество вычтется изъ положительнаго, тогда положительное количество увеличится; и неже недостатокъ безъ придачи не можетъ уничтоженъ быть.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 6. Но какъ одинъ недостатокъ бываетъ больше другаго, такъ и сумма, или разность недостаточныхъ неравныхъ количествъ правильно принимается въ разсужденіе.

ЗАДАЧА I.

§. 7. *Сложить простыя и сложныя количества.*

РѢШЕНІЕ.

1. *Въ простыхъ количествахъ* одинакія литеры складываются въ одну сумму, которая означается числомъ, предъ ними поставленнымъ. На пр. $2a + 3a = 5a$. Разныяжъ литеры соединяются знакомъ $+$. На пр. a и b составляютъ сумму $a + b$.

2. *Въ сложныхъ количествахъ.*

A) Когда буквы будутъ одинакія, и притомъ,

α. Знаки одинакіе, тогда сложеніе положительныхъ и недостаточныхъ литеръ производится, какъ въ простыхъ количествахъ. На пр.

$$\begin{array}{r} a - 2b + 3c \\ 3a - 4b + 5c \\ \hline 4a - 6b + 8c \end{array}$$

β. Когдажъ при одинакихъ буквахъ знаки будутъ разные, тогда сложеніе перемѣняется въ вычитаніе, и передъ остаткомъ ставится знакъ большаго количества. На пр.

$$\begin{array}{r} 5a + 6b - 7c \\ 7a - 8b + 9c \\ \hline 12a - 2b + 2c \end{array}$$

B)

B) Когда буквы будутЪ разныя, вЪ такомЪ случаѣ данныя количества ставятся рядомЪ, и удерживаютЪ прежнїе свои знаки. На пр.

$$\begin{array}{r} a + b \\ c - d \\ \hline a + b + c - d \end{array}$$

ЗАДАЧА II.

§. 8. *Вычесть взаимно между собою простыя и сложныя количества.*

РѢШЕНІЕ.

1. *ВЪ простыхЪ количествахЪ*, естьли буквы будутЪ одинакія, то меньшее количество вычитается изЪ большаго, и разность означается остаточнымЪ числомЪ, напереди поставленнымЪ. На пр.

$$5a - 2a = 3a$$

КогдажЪ количества будутЪ изображены разными литерами, вЪ такомЪ случаѣ вычитаніе дѣлается, полагая между тѣми количествами знакЪ —. ПоложимЪ, что изЪ a надлежитЪ вычесть b, то разность будетЪ $a - b$.

2. *ВЪ сложныхЪ количествахЪ* знаки вычитаемаго перемѣняются вЪ противные, и по томЪ дѣлается сложеніе. На пр. естьли изЪ $a + 2c - 3d$, должно вычесть $3b - 4c - 5d$: то надлежитЪ сдѣлать слѣдующее сложеніе:

$$\begin{array}{r} a + 2c - 3d \\ -3b + 4c + 5d \\ \hline a - 3b + 6c + 2d \end{array}$$

Доказательство явствуетъ изъ прибавленія I къ опредѣленію II; понеже для отнятія или уничтоженія отрицательнаго количества или недостатка, должно приложить количество положительное, то есть, перемѣнить знакъ отрицательной въ положительной.

ЗАДАЧА III.

§. 9. *Умножить простыя и сложныя количества.*

РѢШЕНІЕ.

1. *Въ простыхъ количествахъ* множимыя литеры хотя будутъ одинакія, хотя разныя, пишутся одно подлѣ другаго, и когда передъ ними находятся числа, то и произведеніе оныхъ ставится передъ тѣми литерами. На пр.

$$\begin{array}{c} a \\ a \\ \hline aa \end{array} \qquad \begin{array}{c} a \\ b \\ \hline ab \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3\,a \\ 2\,b \\ \hline 6ab \end{array}$$

2. *Въ сложныхъ количествахъ* умноженіе дѣлается, такъ какъ въ простой Ариѳметикѣ, умножая между собою по порядку всѣ сорты, и притомъ наблюдая одно такое правило: *одинакіе знаки въ произведе-*

веденіи дѣлаютъ $+$, *а разные* $-$. На пр.

$$\begin{array}{r} a-b \\ c-d \\ \hline -ad+bd \\ ac-bc \\ \hline ac-ad-bc+bd \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ c-d \\ \hline -ad-bd \\ ac+bc \\ \hline ac-ad+bc-bd \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Что положительныя количества, будучи умножены взаимно между собою, производятъ положительныяжъ, въ томъ никакого сомнѣнія не заключается. Но что $+$ и $-$ въ произведеніи дѣлаютъ $-$, сіе явствуетъ изъ слѣдующаго: положимъ, что $(a-b)$ должно умножить на $+c$, возьми $a-b=m$, то будетъ произведеніе изъ c на $a-b=cm$; уничтожь недостаточество, приложивъ съ обѣихъ сторонъ b, и будетъ $a=b+m$, и обое сіе будучи умножено на $+c$, производитъ равныя $ca=cb+cm$; и какъ требуется только произведеніе cm, то будетъ $ca-cb=cm$, то есть, $-b$ умноженное на $+c$, производитъ $-cb$. Равнымъ образомъ доказывается, что $-$ и $-$ въ произведеніи дѣлаютъ $+$. Положимъ, что $a-b$ должно умножить на $c-d$. Изъ предъидущаго доказательства явствуетъ, что произведеніе изъ $a-b$ на одного множителя, то

 есть

есть на $+c$, будетъ $= ac - bc$. Но какъ требуется также произведеніе изъ $a-b$ на $-d$, то положимъ опять $a-b=m$, или $a=b+m$, и будетъ $-ad=-bd-md$, или $bd-ad=-md$; сложивъ же всѣ произведенія, произойдетъ $ac-bc-ad+bd$. Ч. н. д.

ЗАДАЧА IV.

§. 10. *Раздѣлить простыя и сложныя количества.*

РѢШЕНІЕ.

1. *Въ простыхъ количествахъ* въ дѣлимомъ уничтожь дѣлителя; что останется, то будетъ частное число; понеже оное, будучи умножено на дѣлителя, производитъ дѣлимое число (§. 66. Ариѳ.). На пр.

$$\begin{array}{c|c} ab & b \\ a & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} abc & ac \\ b & \end{array}$$

Ежели дѣлителя уничтожить не можно; въ такомъ случаѣ дѣленіе означается своимъ знакомъ.

$$\begin{array}{c|l} ab & = ab : c = \frac{ab}{c} \\ c & \end{array}$$

2. *Въ сложныхъ количествахъ.*

α. Ежели дѣлитель содержится въ дѣлимомъ числѣ, то дѣленіе дѣлается такимъ же образомъ, какъ и въ простой Ариѳметикѣ, то есть, вычитая дѣлителя изъ дѣлимаго чи-

числа; и естьли дѣлитель будетъ содержаться въ дѣлимомъ числѣ нѣсколько разъ, то оный до тѣхъ поръ вычитается, пока не будетъ видно, что онъ болѣе не содержится въ дѣлимомъ числѣ (§. 69 Арие.). На пр.

$$\begin{array}{r|l|l} a - b & a^2 - b^2 & a + b \\ & a^2 - ab & \\ \hline & ab - b^2 & \\ & ab - b^2 & \\ \hline \end{array}$$

β. Ежели знаки дѣлимаго числа и дѣлителя будутъ разные, то надлежитъ наблюдать тоже правило, которое въ умноженіи имѣетъ мѣсто, то есть, *одинакіе знаки производятъ* +, *а разные* —. На пр.

$$\begin{array}{l|l} ac + cb - ad - bd & c - d \\ a + b \quad\quad a + b & \end{array}$$

γ. Ежели дѣлитель не содержится въ дѣлимомъ числѣ, то дѣленіе означается своимъ знакомъ:

$$\frac{a + b}{c} \text{ или } (a + b) : c$$

Всѣхъ сихъ случаевъ доказательство есть слѣдующее: понеже дѣленіе отдѣляетъ то, что чрезъ умноженіе совокупляется (§. 67 Арие.).

ОПРЕ-

ОПРЕДѢЛЕНІЕ III.

§. 11. *Степеньми* (potentiae, ſive dignitates) называются тѣ количества, которыя изъ умноженія одного и тогожъ количества самого на себя, или на свои произведенія, происходятъ. На пр.

$$a \times a = aa;\ aa \times a = aaa.$$

ПРИМѢЧАНІЕ.

§ 12. Въ такомъ же смыслѣ слово δύναμις или *степень* употребляетъ и Діофантъ кн. 1. опред. 2. См. тамъ же прим. Бахет.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 13. Для различенія первыхъ степеней, давно уже древніе выдумали какъ знаки, такъ и особливыя имена. Но удобнѣе оныя степени числами съ правой руки, повыше радикса ихъ надписанными, и сими словами, *первая степень*, *вторая*, *третья*, *четвертая*, и такъ далѣе, означаются. На пр. a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, вмѣсто a. aa. aaa. $aaaa$. $aaaaa$. Числа, которыя означаютъ классы степеней, называются *знаменателями* или *показателями степеней* (exponentes potentiarum).

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 14. И такъ первая степень означаетъ радиксъ, вторая квадратъ, третья кубъ, четвертая биквадратъ.

ПРИБАВЛЕНІЕ 3.

§. 15. Ежели передъ первою степенью поставится нуль, то знаменатели будутъ логариѳмы степеней, продолжающихся въ Геометрической прогрессіи. На пр.

$$\overset{0}{a}.\ \overset{1}{a}.\ \overset{2}{a}.\ \overset{3}{a}.\ \overset{4}{a}.$$

1. 2. 4. 8. 16 и проч. (§. 177. Ариѳ.)

ПРИБАВЛЕНІЕ 4.

§. 16. Слѣдовательно произведенія степеней происходятъ чрезъ сложеніе ихъ знаменателей (§. 180 Ариѳ.). На пр.

$$a^2 \times a^3 = a^5, \text{ и } a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Частныяжъ ихъ числа находятся, вычитая знаменателя дѣлящей степени изъ знаменателя дѣлимой (§. 181 Ариѳ.) На пр.

$$a^5 : a^2 = a^3, \text{ и } a^r : a^n = a^{r-n}.$$ Слѣд. a^0, или $b^0 = 1$.

Ибо $1 = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{b^1}{b^1}$.

Но $\frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0$, а $\frac{b^1}{b^1} = b^{1-1} = b^0$. Чего ради $1 = a^0 = b^0$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 5.

§. 17. Когдажъ какую степень, взятую за радиксъ, надобно будетъ возвысить въ степень вышшаго класса, въ такомъ случаѣ знаменателя степени, представляющей радиксъ, и знаменателя той степени, которая требуется, должно умножить между собою. Пусть будетъ aa радиксъ, и требуется сыскать кубъ его, то есть, третью степень, то будетъ $a^{2.3} = a^6$. Ибо сіе количество происходитъ изъ того, когда aa само на себя, и по томъ на произведеніе $aaaa$ будетъ умножено.

ПРИБАВЛЕНІЕ 6.

§. 18. Обратно, когда надобно будетъ извлечь радиксъ изъ данной степени, знаменатель ея раздѣляется на знаменателя той степени, коей радиксъ требуется, то есть, для радикса квадратнаго, дѣлится на 2, для кубическаго на 3, а для радикса биквадратнаго на 4. Такимъ образомъ радиксъ квадратной изъ a^6 будетъ $a^{6:2} = a^3$, радиксъ кубическій изъ $a^6 = a^{6:3} = a^2$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 7.

§. 19. Слѣдовательно о радиксахъ количествъ можно разсуждать такъ, какъ о степеняхъ, коихъ знаменатели суть ломаныя числа (§ 124 Ариѳ.). Причемъ надлежитъ замѣтить, что числитель есть показатель той степени, изъ которой должно извлечь радиксъ,

диксъ, а знаменатель есть показатель желаемаго радикса.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ IV.

§. 20. *Ирраціональныя* или *глухія количества* (irrationales, ſive ſurdae quantitates) суть радиксы несовершенныхъ степеней, (§. 155 Ариѳ.). Такія количества означаются радикальнымъ знакомъ, напереди поставленнымъ $\sqrt{}$, надъ которымъ тогда только надписывается знаменатель радикса, когда онъ будетъ превышать второй радиксъ. На пр. $\sqrt{a^5}$ значитъ квадратной радиксъ количества a^5; $\sqrt[3]{a^5}$ значитъ кубической радиксъ тогожъ количества; ни одинъ изъ нихъ не можетъ найденъ быть совершенной. *Ирраціональныя числа* (ſurdi numeri) суть $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{12}$, и проч.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 21. Ирраціональное количество справедливо пишется и безъ знака радикальнаго, раздѣливъ знаменателя глухой степени на знаменателя другой, коей радиксъ требуется. На пр. $\sqrt{a^5} = a^{5:2}$; $\sqrt[3]{a^5} = a^{5:3}$ (§. 18. 19.).

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 22. Ирраціональныя количества, такъ какъ дроби, приводятся къ одинакому знаменателю. (§. 137 Ариѳ.). На пр. $\sqrt{a^5}$ и $\sqrt[3]{a^7} = a^{5:2}$ и $a^{7:3} = a^{15:6}$ и $a^{14:6}$. Такимъ образомъ оба количества относятся къ шестому радиксу.

ПРИ-

ПРИБАВЛЕНІЕ 3.

§. 23. Когда иррацїональное количество, будучи раздроблено на множители, будетъ содержать въ себѣ рацїональное, въ такомъ случаѣ изъ сего извлеченной радиксъ предъ знакомъ радикальнымъ поставленъ быть можетъ, и чрезъ то, простѣйшее изображенїе получается для онаго количества. Такимъ образомъ вмѣсто $\sqrt{48}$ должно написать $\sqrt{16.3}$, и понеже 16 есть квадратъ, того ради надлежитъ извлечь изъ него радиксъ, и поставить оной предъ знакомъ радикальнымъ. На пр. $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$; $\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = 2\sqrt{3}$; также $\sqrt[3]{40}$, или $\sqrt[3]{8.5} = 2\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{27.5} = 3\sqrt[3]{5}$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 4.

§. 24. Изъ чего явствуетъ, что чрезъ такое приведенїе иногда производятся количества, хотя сами по себѣ иррацїональныя, но между собою *сообщающїяся и сoизмѣримыя* (communicantes et commenſurabiles), то есть, которыя содержатся между собою, какъ рацїональное количество къ рацїональному. На пр. никто не сомнѣвается о томъ, что иррацїональныя количества $4\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3}$ содержатся между собою, какъ 4 : 2, или 2 : 1.

ЗАДАЧА V.

§. 25. *Сложить, или вычесть иррацїональныя количества.*

РѢШЕНІЕ.

1. Ежели количества будутъ соизмѣримыя, то надлежитъ складывать, или вычитать одни только тѣ числа, которыя написаны предъ радикальнымъ знакомъ. На пр. $4\sqrt{6}+3\sqrt{6}=7\sqrt{6}$; или $7\sqrt{6}-3\sqrt{6}=4\sqrt{6}$.

2.

2. Ежели количества не будутъ соизмѣримыя, то сложеніе и вычитаніе означается знаками + и —. На пр.

$$\sqrt{6}+\sqrt{3}\text{, или } \sqrt{6}-\sqrt{3}.$$

ЗАДАЧА VI.

§. 26. Умножить между собою ирраціональныя количества, или раздѣлить одно на другое.

РѢШЕНІЕ.

1. Приведи сперва данныя количества, естьли можно, въ простѣйшіе термины (§. 23).

2. По томъ приведи оныя къ одинакому знаменателю (§. 22).

3. Наконецъ количества, послѣ знака, и передъ знакомъ радикальнымъ находящіяся, умножь, или раздѣли обыкновеннымъ образомъ. На пр.

$\sqrt{3}.\sqrt{2}=\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}.4\sqrt{3}=8.\sqrt{9}=\sqrt{64}.9=\sqrt{576}=24$.

Для дѣленія. $\sqrt{48}:\sqrt{12}=\sqrt{4}=2$, то есть, $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$, и $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, но $4\sqrt{3}:2\sqrt{3}=2$, то есть, послѣднее количество въ первомъ содержится дважды.

4. Когда радикальное количество второй степени умножается само на себя, тогда происходитъ изъ того то, что послѣ знака радикальнаго написано было, токмо съ уничтоженіемъ того радикальнаго знака. На

На пр. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$. Понеже произведеніе изъ того есть $\sqrt{9} = 3$.

5. Когда раздѣлить должно раціональное количество на ирраціональное, то первое возвышается сперва къ той же степени, и передъ оною ставится радикальной знакъ, а по томъ уже производится дѣленіе. На пр. $\frac{6}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}$.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

О употребленіи литеральнаго исчисленія въ изобрѣтеніи правилъ, служащихъ для извлеченія радиксовъ и перемѣненія вещей, также для сысканія свойствъ содержанія Ариѳметическаго и Геометрическаго.

ТЕОРЕМА I.

§. 27.

Дѣйствія Ариѳметическія, производимыя буквами, подаютъ правила подобныхъ дѣйствій, которыя должно употреблять въ особенныхъ количествахъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже буквы суть общіе знаки, которые могутъ означать всякія особенныя количества; того ради, ежели сіи будутъ по-

ставлены на мѣстѣ оныхъ, то дѣйствія съ литерами учиненныя покажутъ правила подобныхъ дѣйствій въ особенныхъ количествахъ. Ч. н. д.

ЗАДАЧА VII.

§. 28. *Найти свойство и разрѣшеніе квадратовъ.*

РѢШЕНІЕ.

1. Возьми двучастной радиксъ, состоящій изъ двухъ членовъ, на пр. $a + b$, и сдѣлай изъ того квадратъ (§. 9.) $aa + 2ab + bb$, то будетъ извѣстно свойство такого квадрата, котораго радиксъ есть двучастной: то есть, *такой квадратъ содержитъ въ себѣ квадраты частей* aa *и* bb, *и притомъ вдвое взятое произведеніе одной части на другую* $2ab$.

2. Разрѣшеніежъ такого квадрата дѣлается такъ, что радиксъ его $a + b$ производится чрезъ нѣкоторое дѣленіе; и чтобъ учинять сіе, то вопервыхъ надлежитъ отдѣлить первой квадратъ отъ двухъ прочихъ членовъ, и радиксъ его a поставить на мѣстѣ частнаго числа. По томъ найденное первое частное число a, дважды взятое $2a$, должно принять вмѣсто дѣлителя, и по раздѣленіи выдетъ b другая часть радикса, коей квадратъ, будучи вычтенъ, уничтожитъ и послѣдній

ній членъ квадрата. И потому справедливы суть правила, служащія для извлеченія квадратнаго радикса, кои безъ всякаго доказательства изъяснены были въ Ариѳметикѣ. На пр.

aa	$+2ab+bb$	$a+b$
aa	$2a \quad b$	
0	b	
	$2ab+bb$	
	$0 \quad 0$	

ЗАДАЧА VIII.

§. 29. *Найти свойство и разрѣшеніе кубовъ.*

РѢШЕНІЕ.

1. Возьми также двучастнаго радикса $a+b$ квадратъ $aa+2ab+bb$, и тотъ же квадратъ умножь на радиксъ, произведеніе $a^3+3aab+3abb+b^3$ будетъ кубъ того радикса; слѣдовательноо собенное свойство всякаго куба есть такое: *кубъ состоитъ изъ кубовъ частей a^3 и b^3, и притомъ изъ произведенія каждой части, трижды взятой, на квадратъ другой части*, то есть $3aab+3abb$.

2. Для разрѣшенія куба, чрезъ которое находится радиксъ $a+b$, надлежитъ отдѣлить первой кубъ отъ прочихъ трехъ членовъ, и его радиксъ a принять вмѣсто

 ча-

частнаго числа; для сысканіяжъ втораго частнаго числа b, должно раздѣлить $3aab$ на $3aa$, то есть, на квадратъ первой части радикса a трижды взятой, и какъ въ общемъ примѣрѣ куба остается еще $3abb$ и b^3, то видно, что надлежитъ еще вычитать произведеніе квадрата новаго частнаго числа, трижды взятаго $3bb$ на первую часть радикса a, и наконецъ вычесть кубъ b^3 новаго частнаго числа. Но вычитаніе такихъ количествъ предписывается въ правилахъ извлеченія радикса кубическаго, въ Ариѳметикѣ показаннаго, справедливость которыхъ подтверждается примѣромъ слѣдующаго всеобщаго исчисленія.

$$\begin{array}{r|l|l}
a^3 & +3aab+3abb+b^3 & a+b \\
\underline{a^3} & \overline{3aa\ \ +3a\qquad} & \\
o & \ \ \ \ b \qquad\ bb \qquad b^3 & \\
\hline
 & 3aab+3abb+b^3 & \\
 & \overline{\ \ o\qquad\ o\qquad\ o} &
\end{array}$$

Примѣч. Равнымъ образомъ находятся правила для извлеченія радиксовъ изъ высшихъ степеней.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ V.

§. 30. *Перемѣненіе* (Permutatio) есть способъ, изъ нѣсколькихъ вещей составлять всѣ возможные порядки, помѣщая данныя

вещи

вещи одну подлѣ другой, всѣми возможными образами. *Совокупленіе* (Combinatio) есть способъ, изъ данныхъ вещей составлять порядки, соединяя по двѣ, по три вещи, и такъ далѣе, между собою, по нѣкоторымъ условіямъ.

ЗАДАЧА IX.

§. 31. *Найти правила для перемѣненія нѣсколькихъ вещей.*

РѢШЕНІЕ.

Вопервыхъ явствуетъ, что одна вещь *a* не можетъ имѣть больше одного порядка, и что двѣ вещи, *a* и *b*, два порядка имѣть могутъ, *ba* и *ab*. Естьли же къ нимъ присоединится третья вещь *c*, то она занимать можетъ три разныя мѣста въ каждомъ изъ упомянутыхъ двухъ порядковъ, а именно, одно мѣсто съ начала, другое въ срединѣ, третье на концѣ; изъ чего происходятъ слѣдующіе 6 порядковъ: *cba*, *bca*, *bac*, *cab*, *acb*, *abc*. Подобнымъ образомъ, естьли къ тремъ онымъ вещамъ присовокупится четвертая *d*, то она въ каждомъ изъ предъидущихъ 6 порядковъ четыре разныя мѣста занимать можетъ; изъ чего слѣдуетъ, что четыре вещи *a*, *b*, *c*, *d*, могутъ имѣть 24 разные порядка, а именно:

 dcba,

dcba, cdba, cbda, cbad,
dbca, bdca, bcda, bcad,
dbac, bdac, badc, bacd,
dcab, cdab, cadb, cabd,
dacb, adcb, acdb, acbd,
dabc, adbc, abdc, abcd.

Продолжая такимъ образомъ сыскивать всѣ возможныя распоряженія данныхъ вещей, легко вывесть можно слѣдующее правило: *Напиши столько чиселъ въ натуральномъ порядкѣ:* 1, 2, 3, 4, и пр. *сколько дано вещей, и умножь всѣ оныя числа между собою: произведеніе будетъ число всѣхъ возможныхъ перемѣнъ въ порядкѣ данныхъ вещей.*

Число вещей	Число перемѣнъ
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	820
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
и вообще	
n	$1 . 2 . 3 . 4 \ldots n$

ЗАДА-

ЗАДАЧА X.

§. 32. *Найти правила для совокупленія нѣсколькихъ вещей.*

РѢШЕНІЕ.

1) Положимъ, что дано пять вещей *a, b, c, d, e*, и спрашивается число всѣхъ совокупленій, изъ каждыхъ двухъ, трехъ, четырехъ, и пяти оныхъ вещей, или число всѣхъ возможныхъ словъ, которыя изъ пяти оныхъ буквъ составлены быть могутъ. Вопервыхъ явствуетъ, что изъ пяти буквъ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, произойти могутъ только пять словъ, изъ одной литеры состоящихъ; для составленія же всѣхъ словъ, изъ двухъ литеръ состоящихъ, можно каждую изъ данныхъ пяти буквъ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, написать подлѣ каждаго изъ пяти однолитерныхъ словъ, слѣдовательно число всѣхъ изъ двухъ литеръ состоящихъ словъ будетъ 5 × 5, то есть 25. Оные суть *aa*, *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *ba*, *bb*, и пр. Для составленія всѣхъ словъ, изъ трехъ литеръ состоящихъ, написать можно каждую букву подлѣ каждаго изъ двулитерныхъ словъ; изъ чего слѣдуетъ, что число всѣхъ словъ, состоящихъ изъ трехъ литеръ, будетъ 5 × 5 × 5, то есть 125. Оныя суть *aaa*, *aab*, *aac*, *aad*, и проч. Подобнымъ образомъ доказать можно, что число всѣхъ изъ че-

тырехЪ буквЪ составленныхЪ словЪ будетЪ $5 \times 5 \times 5 \times 5$, то есть 625, и что число всѣхЪ изЪ пяти литерЪ состоящихЪ словЪ будетЪ $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$, то есть 3125. ИзЪ сего выводится слѣдующее правило: *Возвысь данное число вещей на такую степень, какую означаетЪ число вещей совокупляемыхЪ: то выдетЪ искомое число всѣхЪ совокупленій.*

Число всѣхЪ вещей	Ч. вещ. сов.	Ч. всѣхЪ совокупленій.
m	n	m^n

2) ПоложимЪ, что спрашивается число всѣхЪ возможныхЪ словЪ изЪ тѣхЪ же пяти буквЪ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, токмо сЪ тѣмЪ условіемЪ, чтобЪ исключить всѣ тѣ слова, вЪ коихЪ одна и та же буква нѣсколько разЪ находится. ВЪ семЪ случаѣ число всѣхЪ изЪ одной литеры состоящихЪ словЪ также будетЪ пять, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Но понеже каждая изЪ сихЪ пяти буквЪ только сЪ прочими четырьмя совокупляется, то число всѣхЪ изЪ двухЪ литерЪ состоящихЪ словЪ будетЪ 5×4, то есть 20. Оныя суть *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *ba*, *bc*, *bd*, и проч. Каждое изЪ сихЪ двулитерныхЪ словЪ соединиться можетЪ только сЪ такою буквою, какой вЪ себѣ не содержитЪ; а поне-

же

же остаются три такія буквы, то число всѣхъ изъ трехъ литеръ составленныхъ словъ будетъ 5×4×3, то есть 60. Оныя суть *abc*, *abd*, *abe*, *bac*, *bad*, и пр. Продолжая умствовать такимъ образомъ, легко вывесть можно слѣдующее правило:

Напиши столько чиселъ въ натуральномъ порядкѣ, 1, 2, 3, 4, 5, сколько дано всѣхъ буквъ, и начиная съ самаго большаго, умножь между собою столько чиселъ, сколько будетъ совокупляемыхъ литеръ или вещей: произведеніе покажетъ число всѣхъ возможныхъ словъ или совокупленій, изъ разныхъ литеръ или вещей состоящихъ.

Ч. вс. вещей	Ч. вещей сов.	Ч. всѣхъ совокупленій
m	n	$m.m-1.m-2\ldots m-n+1.$

3) Въ предъидущихъ совокупленіяхъ находятся такія, которыя состоятъ изъ одныхъ и тѣхъ же вещей, разнымъ образомъ расположенныхъ, на пр. *ab* и *ba*. И такъ, естьли должно будетъ удержать по одному только совокупленію изо всѣхъ заключающихъ въ себѣ одинакія вещи: то *надлежитъ раздѣлить число всѣхъ совокупленій, изъ одинакаго числа вещей состоящихъ, на число всѣхъ возможныхъ перемѣненій въ порядкѣ вещей пріемлемыхъ въ совокупленіе,*

Ч. вс. вещей Ч. вещ. сов. Ч. всѣхъ совок.

$m \quad . \quad n; \; \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdots m-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$

См. Валлиса *Tr. de combinationibus* Том. II соч. стран. 485, Іакова Бернулія *Ars conjectandi*, Баз. 1713. 4. Часть II гл. 1. Гинденбурга *Novi systematis permutationum ac variationum primae lineae*, Лейпц. 1781. 4.

ЗАДАЧА XI.

§. 33. *Найти всеобщее правило для возвышенія двучленнаго количества на такую степень, у которой показатель есть цѣлое число.*

РѢШЕНІЕ.

Умножь постепенно между собою нѣсколько двучленныхъ количествъ, у которыхъ первые члены суть одинакіе, на пр. $x+a$, $x+b$, $x+c$, и произведеніе расположи такимъ образомъ, чтобъ степени количества x, начиная отъ самой большой, по порядку одна за другою слѣдовали:

$$\begin{array}{r} x+a \\ x+b \\ \hline bx+ab \\ x^2+ax \quad\quad \\ \hline x^2+(a+b)x+ab \\ x+c \\ \hline cx^2+(ac+bc)x+abc \\ x^3+(a+b)x^2+abx \quad\quad \\ \hline x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc \end{array}$$

то

то видно будетъ изъ самаго дѣйствія, что первой членъ въ произведенiи есть количество x возвышенное на такую степень, какую изображаетъ число двучленныхъ множителей, и потому, естьли оное число назовется m, то первой въ произведенiи членъ будетъ x^m.

Также явствуетъ, что второй членъ есть ближайше меньшая степень x^{m-1}, умноженная на сумму всѣхъ прочихъ количествъ a, b, c, кои естьли будутъ равны между собою, какъ то требуется въ сей задачѣ, то второй членъ будетъ max^{m-1}.

Третiй членъ есть ближайше меньшая степень x^{m-2}, умноженная на сумму всѣхъ произведенiй изъ каждыхъ двухъ прочихъ количествъ ab, ac, bc; и понеже оныя должны быть равны, то надлежитъ повторить квадратъ a^2 столько разъ, сколько можно сдѣлать всѣхъ совокупленiй, соединяя по два количества (§. 32.). И потому третiй членъ будетъ $\frac{m.\,m-1}{1.\,2.} a^2 x^{m-2}$.

Продолжая умствовать такимъ образомъ, легко доказать можно слѣдующее равенство:

(x

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m.\,m-1}{1.\,2}a^2x^{m-2} + \frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3}a^3x^{m-3} + etc.$$ которое изображаетъ искомое всеобщее правило возвышенія.

ЗАДАЧА XII.

§. 34. *Найти, какія суммы происходятъ изъ того, когда въ прогрессіи Ариѳметической непрерывной крайніе и средніе члены, находящіеся въ равномъ разстояніи отъ крайнихъ, складываются.*

РѢШЕНІЕ.

Представь Ариѳметическую прогрессію въ литерахъ, наблюдая вездѣ одинакую разность. На пр.

$$\begin{array}{ccccc} a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d \\ & & a+2d, & a+\ \ d, & a \\ \hline & & 2a+4d & 2a+4d & 2a+4b \end{array}$$

Возьми суммы крайнихъ и среднихъ членовъ, и видно будетъ, что оныя равны между собою. И такъ, понеже литеры представляютъ какія нибудь числа, то явствуетъ, что въ Ариѳметической прогрессіи суммы крайнихъ и среднихъ членовъ, или средній вдвое взятой, когда число членовъ будетъ неровное, равны между собою, что на своемъ мѣстѣ и въ Ариѳметикѣ доказано было (§. 103 въ Ариѳ.).

ЗА

ЗАДАЧА XIII.

§. 35. Сравнить произведенія крайнихъ и среднихъ членовъ, состоящихъ въ Геометрической непрерывной прогрессіи.

РѢШЕНІЕ.

Пусть будутъ члены Геометрической прогрессіи (§. 97 Ариѳ.) изображенные литерами:

$$a,\ ea,\ e^2 a,\ e^3 a,\ e^4 a$$

$$\frac{e^2 a}{e^4 aa}.\quad \frac{ea}{e^4 aa}.\quad \frac{a}{e^4 aa}$$

то явствуетъ, что произведенія крайнихъ и среднихъ членовъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ крайнихъ, равны между собою (§. 110 Ариѳ.).

ЗАДАЧА XIV.

§. 36. Найти, какимъ образомъ члены Геометрическаго содержанія чрезъ умноженіе и дѣленіе могутъ перемѣнитьсл такъ, чтобъ и послѣ учинившихся перемѣнъ было тоже Геометрическое содержаніе между тѣми членами.

РѢШЕНІЕ.

Изобразивъ оные члены буквами, на пр.

$$\frac{a : \quad ea}{b \qquad b}\ \text{умнож.} \qquad \frac{a : \quad ea}{b \qquad b}\ \text{разд.}$$

$$ab : eab = a : ea \qquad \frac{a}{b} : \frac{ea}{b} = e : ea$$

легко усмотрѣть можно, что они могутъ умножены, или раздѣлены быть на одно тре-

третіе число, такъ что содержаніе ихъ, или знаменатель содержанія не перемѣнится (§. 119. 120. Ариѳ.), понеже въ обоихъ случаяхъ, какъ въ произведеніи, такъ и въ частномъ числѣ, послѣдующій членъ происходитъ изъ умноженія предъидущаго члена на тогожъ знаменателя содержанія (§. 97 Ариѳ.).

ЗАДАЧА XV.

§. 37. Найти, какимъ образомъ члены Геометрической пропорціи чрезъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе, могутъ перемѣниться такъ, чтобъ и послѣ перемѣны была Геометрическая пропорція между тѣми членами.

РѢШЕНІЕ.

Представь Геометрическую пропорцію въ литерахъ, на пр.

$a : ea = b : eb$, то будетъ

1. $a : b = ea : eb$ *черезъ членъ* (alternatim).
2. $ea : a = eb : b$ *обратно* (inverſe).
3. $a + ea : a = b + eb : b$ (converſim).
4. $a + b : ea + eb = a : ea$ (per ſyllepſin).
5. $a - b : ea - eb = a : ea$ (per dialepſin).
6. $a + ea : ea = b + eb : eb$ (compoſite).
7. $ea - a : a = eb - b : b$ (diviſim).

или $ea - a : ea = eb - b : eb$

И умножая и дѣля одинъ которой нибудь членъ, или оба члена содержанія на одно число. На пр.

8.

8. $ac : ea = bc : eb$

9. $a : eac = b : ebc$

10. $\frac{a}{c} : ea = \frac{b}{c} : eb$

11. $a : \frac{ea}{c} = b : \frac{eb}{c}$

12. $ac : eac = b : eb$

13. $\frac{a}{c} : \frac{ea}{c} = b : eb$

Умножая и дѣля на разныя числа. На пр.

14. $ac : eac = bd : ebd$

15. $\frac{a}{c} : \frac{ea}{c} = \frac{b}{d} : \frac{eb}{d}$

И степени чиселъ суть пропорціональныя. На пр.

16. $a^2 : e^2 a^2 = b^2 : e^2 b^2$

$a^n : e^n a^n = b^n : e^n b^n$ (generatim).

$a : ea = b : eb$

17. $ea : eoa = eb : eob$ (ordinate).

$a : eoa = b : eob$ (ex aequo).

$a : ea = b : eb$

18. $ea : eoa = \frac{b}{o} : b$ (perturbate).

$a : eoa = \frac{b}{o} : eb$ (ex aequo).

Во всѣхъ сихъ перемѣнахъ произведенія крайнихъ и среднихъ членовъ равны между со-

собою, и никакого сомнѣнія не заключается въ томъ, что такія перемѣны въ литерахъ, и между четырьмя числами, непрерывно или раздѣльно пропорціональными, имѣютъ мѣсто (§. 110 Ариѳ.).

ЗАДАЧА XVI.

§. 38. *Найти частное число, которое происходитъ, когда разность между первымъ и послѣднимъ членомъ непрерывной Геометрической прогрессіи, будетъ раздѣлена на знаменателя, единицею уменьшеннаго.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть будетъ вышепредложенной прогрессіи (§. 32.) разность между первымъ и послѣднимъ членомъ $= e^4a - a$, знаменатель содержанія единицею уменьшенной $= e - 1$, то, когда e^4a раздѣлится на e, частное число будетъ e^3a; но сіе, на -1 будучи умножено, не можетъ вычтено быть изъ другаго члена дѣлимаго числа; слѣдовательно должно придать e^3a, и опять повторять дѣленіе. Но понеже и сіе не уничтожаетъ дѣлимаго числа, и остается e^2a, то дѣленіе продолжается до тѣхъ поръ, пока другая дѣлимаго числа часть $-a$ не уничтожится. Производится же частное число $e^3a + e^2a + ea + a$, то есть, происходятъ всѣ прогрессіи числа, выключая послѣднее число e^4a, что явствуетъ изъ самаго дѣйствія.

$$e-1 \left| \begin{array}{l} e^4a-a \\ \underline{e^4a-e^3a} \end{array} \right| e^3a+e^2a+ea+a$$

$$\begin{array}{l} +e^3a-a \\ \underline{+e^3a-e^2a} \\ \quad +e^2a-a \\ \quad \underline{+e^2a-ea} \\ \qquad +ea-a \\ \qquad \underline{+ea-a} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

ГЛАВА ТРЕТІЯ.

О изобрѣтеніи и приведеніи уравненій.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ VI.

§. 39.

Уравненіе** или **эквація (aequatio) есть изображеніе равенства двухъ количествъ.

ЗАДАЧА XVII.

§. 40. *Привести данную задачу въ уравненіе.*

РѢШЕНІЕ.

1. Во всякой задачѣ три вещи особливо должно различать и принимать въ разсужденіе, то есть: 1) количества извѣстныя, 2) количества неизвѣстныя, и 3) отношеніе, какое количества извѣстныя и неизвѣстныя имѣютъ между собою.



2. Чтобъ удобнѣе можно было различать извѣстныя количества отъ неизвѣстныхъ, то извѣстныя количества означаются первыми алфавитными литерами *a*, *b*, *c*, а неизвѣстныя послѣдними *x*, *y*, *z*.

3. Иногда извѣстное или неизвѣстное количество полезно изображать чрезъ начальную литеру того слова, которымъ оно означается. Какъ на пр. сумма литерою *s*, а разность или дифференція литерою *d* изображается.

4. Когда неизвѣстныя количества имѣютъ такое отношеніе къ извѣстнымъ, что, спознавъ одно изъ нихъ, будутъ извѣстны и прочія чрезъ сравненіе съ извѣстными, въ такомъ случаѣ, для означенія неизвѣстныхъ количествъ, довольно и одной литеры. На пр. когда разность неизвѣстныхъ количествъ дана, то она съ меньшимъ количествомъ будучи сложена, производитъ большое количество.

5. Послѣжъ того, какъ учинено будетъ наименованіе извѣстныхъ и неизвѣстныхъ количествъ, разсуждать должно о томъ, какое взаимное отношеніе имѣютъ они между собою, чтобъ изъ сравненія ихъ можно было произвести два равныя количества; ибо сіи, знакомъ равенства, между

жду ими поставленнымЪ, будучи соединены между собою, дѣлаютЪ уравненіе.

6. НадлежитЪ стараться, чтобЪ всѣ извѣстныя вЪ уравненіи количества находились вмѣстѣ.

7. Но когда неизвѣстныхЪ количествЪ, особливыми литерами означенныхЪ, будетЪ много, вЪ такомЪ случаѣ надлежитЪ дѣлать столько уравненій, сколько есть неизвѣстныхЪ количествЪ.

На пр. дана сумма и разность двухЪ количествЪ, и требуется найти самыя тѣ неизвѣстныя количества.

Пусть будетЪ сумма $= a$, разность d, большое количество $= y$, а меньшое $= x$, то видно, что количества имѣютЪ между собою двоякое отношеніе, вЪ разсужденіи суммы, и вЪ разсужденіи разности: потому что два неизвѣстныя количества, вмѣстѣ взятыя, равняются суммѣ, слѣдовательно

$$a = x + y$$

и меньшое вычетши изЪ большаго, выдетЪ остатокЪ равной разности, то есть,

$$d = y - x$$

УдобнѣежЪ сдѣлается наименованіе количествЪ, когда вмѣсто большаго количе-

ства къ меньшому придана будетъ разность, и потому тѣ два неизвѣстныя количества будутъ изображены такимъ образомъ: меньшое $= x$, а большое $= x + d$, чего ради $a = 2x + d$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ VII.

§. 41. *Членами уравненія* (membra aequationis) называются самыя тѣ количества, которыя соединяются между собою знакомъ равенства. На пр. въ уравненіи $d = y - x$ d есть *первой членъ*, а $y - x$ *второй членъ уравненія*.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ VIII.

§. 42. Уравненіе, въ разсужденіи числа измѣреній неизвѣстнаго количества, есть или *простое* (ſimplex), въ которомъ неизвѣстное количество будетъ первая степень, то есть радиксъ; или *квадратическое* (quadratica), *кубическое* (cubica), *биквадратическое* (biquadratica), въ которомъ неизвѣстное количество будетъ вторая, третья, или четвертая степень. На пр.

$a^2 + b^2 = x^2$ квадратическое
$a^3 - b^3 = x^3$ кубическое, и проч.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ IX.

§. 43. *Уравненіе квадратическое не полное* или *не совершенное* (aequatio quadratica

tica affecta, sive imperfecta) называется; въ которомъ недостаетъ квадрата извѣстнаго количества. На пр. $xx + 2\,ax = b^2$. Въ семъ уравненіи недостаетъ квадрата $a\,a$, которой придавъ съ обѣихъ сторонъ, произойдетъ совершенное уравненіе $xx + 2\,ax + aa = bb + aa$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ X.

§. 44. *Приведеніе уравненій* (reductio aequationum) есть дѣйствіе, чрезъ которое неизвѣстныя количества отдѣляются отъ извѣстныхъ, и знаменованіе неизвѣстнаго количества изображается извѣстными количествами.

ЗАДАЧА XVIII.

§. 45. *Сдѣлать приведеніе уравненій.*

РѢШЕНІЕ.

1. Понеже извѣстно изъ свойства равныхъ количествъ (§. 25. 26. Ариѳ.), что чрезъ сложеніе и вычитаніе равныхъ изъ равныхъ, или чрезъ умноженіе и дѣленіе равныхъ на равныя, или чрезъ извлеченіе подобныхъ радиксовъ, или наконецъ чрезъ произведеніе подобныхъ степеней, равенство количествъ не уничтожается; того ради, чтобъ извѣстныя количества, съ неизвѣстными перемѣшанныя, могли отдѣ-

лены быть отЪ оныхЪ, надлежитЪ вычтенныя количества складывать, сложенныя вычитать, раздѣленныя умножать, умноженныя дѣлить, изЪ степеней извлекать радиксЪ, или, когда надобно будетЪ, изЪ радикса дѣлать степени, и такимЪ образомЪ наконецЪ произойдутЪ два члена уравненія, изЪ которыхЪ одинЪ членЪ будетЪ содержать извѣстныя токмо количества, а другой неизвѣстное, чрезЪ извѣстныя изображенное. На пр.

$$x - 4 = 16$$
$$x = 16 + 4 \quad \text{слож.}$$

$$x + 4 = 24$$
$$x = 20 \quad \text{вычтен.}$$

$$\frac{x}{3} = 6$$
$$x = 18 \quad \text{умнож.}$$

$$3x = 12$$
$$x = 4 \quad \text{раздѣл.}$$

$$xx = 16$$
$$x = \sqrt{16} = 4 \quad \text{извлеч. рад.}$$

2. КогдажЪ вЪ задачѣ случатся два неизвѣстныя количества, и для того оная задача (§. 36. нум 5.) будетЪ приведена вЪ два уравненія, вЪ такомЪ случаѣ должно сперва изслѣдовать знаменованіе одного не-

неизвѣстнаго количества, и оное въ другомъ уравненіи, которое содержитъ въ себѣ то неизвѣстное количество, поставить на мѣсто сего, чтобъ имѣть новое уравненіе, въ которомъ одно неизвѣстное количество уничтожено. Ибо, когда сіе неизвѣстное количество будетъ уравнено извѣстному, то поелику отношеніе его къ другому неизвѣстному количеству явствуетъ изъ перваго уравненія, можетъ найдено быть и другое неизвѣстное количество. На пр.

$$a = x + y \qquad d = y - x$$
$$a - x = y \qquad d + x = y$$
$$a - x = d + x$$
$$a = d + 2x$$
$$a - d = 2x$$
$$\frac{a - d}{2} = x$$

Слѣдовательно, понеже извѣстны d и x, будетъ также извѣстно y.

ЗАДАЧА XIX.

§. 46. *Разрѣшить неполное квадратическое уравненіе.*

РѢШЕНІЕ.

Съ обѣихъ сторонъ должно придать по недостаточествующему квадрату извѣстнаго

количества, и изъ совершеннаго квадрата извлечь радиксъ; естьлижъ то же самое учинено будетъ и въ другомъ членѣ, то квадратическое уравненіе приведется въ простое (§. 39. 41.). На пр.

$$x^2 + ax = bb$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2 \quad \text{прилож.}$$
$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = bb + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{bb + \tfrac{1}{4}a^2}$$
$$x = \sqrt{(bb + \tfrac{1}{4}a^2)} - \tfrac{1}{2}a$$

Положимъ, что $x^2 + 12x = 64$

то будетъ $12 = a$, и $64 = b^2$

$$\tfrac{12}{2} = 6 = \tfrac{1}{2}a$$
$$36 = \tfrac{1}{4}a^2$$

Слѣдовательно $x = \sqrt{(64 + 36)} - 6$

то есть, $x = \sqrt{100} - 6$

$= 10 - 6 = 4.$

ЗАДАЧА XX.

§. 47. *Разрѣшить уравненіе каждой степени, на пр. кубическое* $x^3 + ax^2 + b^2x = c^3$.

РѢШЕНІЕ.

Представимъ себѣ, что неизвѣстное въ данномъ уравненіи количество x состоитъ изъ двухъ частей e и y, такъ что $x = e + y$, и вмѣсто количества e примемъ такое число, которое бы какъ можно ближе под-

подходило къ неизвѣстному x: то выдетъ слѣдующее уравненіе.

$$x^3 = e^3 + 3e^2y + 3ey^2 + y^3$$
$$+ax^2 = ae^2 + 2aey + ay^2$$
$$+b^2x = b^2e + b^2y$$

$$c^3 = \left\{\begin{matrix} e^3 \\ +ae^2 \\ +b^2e \end{matrix}\right. + \left\{\begin{matrix} 3e^2y \\ 2aey \\ b^2y \end{matrix}\right. + \left\{\begin{matrix} 3ey^2 \\ ay^2 \end{matrix}\right. + y^3$$

или $c^3 = f^3 + g^2y + hy^2 + y^3$, при чемъ $f^3 = e^3 + ae^2 + b^2e$; $g^2 = 3e^2 + 2ae + b^2$. $h = 3e + a$.

Но какъ y въ сравненіи съ прочими количествами полагается очень малымъ, то безъ великой погрѣшности можно откинуть y^3, и выдетъ квадратическое уравненіе $f^3 + g^2y + hy^2 = c^3$
или $hy^2 + g^2y = c^3 - f^3$

Раздѣлимъ оба члена количествомъ h, то выдетъ

$$y^2 + \frac{g^2 \quad y}{h} = \frac{c^3 - f^3}{h}$$

Положимъ $\frac{g^2}{h} = k$, $\frac{c^3 - f^3 l}{h} = l$

то будетъ

$$y^2 + ky = l^2$$

Слѣдовательно $y = \sqrt{(l^2 + \frac{1}{4}k^2)} - \frac{1}{2}k$ (§. 46).
Найденное такимъ образомъ количество y

 есть-

естьли присовокупится къ принятому по изволенію количеству e, то произойдетъ количество $e + y$, которое меньше нежели e будетъ разнствовать отъ искомаго x, а иногда и совершенно ему равно будетъ. Когда $e + y$ не совершенно равно искомому x, тогда надлежитъ вмѣсто количества x принять $e' + y'$, или вмѣсто количества y принять $y + y'$, такъ что $e' = e + y$, и поступать по предписанному въ началѣ сего рѣшенія правилу, чтобъ сыскать неизвѣстное y'. Ежели потребно будетъ еще ближе подойти къ неизвѣстному x, то надлежитъ принять $y' + y''$ вмѣсто количества y', и положить $e'' = e' + y'$, слѣд. $x = e'' + y''$, а по томъ повторить прежнее дѣйствіе. Такимъ образомъ можно безпрестанно ближе подходить къ искомому количеству x, естьли точнато найти не можно. Въ самомъ дѣйствіи можно вмѣсто изображеній y', y'', употреблять разныя буквы, на пр. p, q, и пр.

ПРИМѢРЪ 1.

Положимъ, что въ уравненіи

$$x^3 + ax^2 + b^2x = c^3,$$

$$a = 2, b = 3,$$

$$c^3 = 2052, \text{ то есть,}$$

$$x^3 + 2x^2 + 3x = 2052$$

Пусть

Пусть будетъ $x = 10 + y$, чего ради $e = 10$. Слѣдственно

$$x^3 = 1000 + 300\,y + 30\,y^2 + y^3$$
$$+ 2\,x^2 = 200 + 40\,y + 2\,y^2$$
$$+ 3\,x = 30 + 3\,y$$

$$2052 = 1230 + 343\,y + 32\,y^2 + y^3$$
$$1230$$

$$822 = 343\,y + 32\,y^2, \text{ или}$$

$$y^2 + \frac{343}{32}\,y = \frac{822}{32}$$

$$+ \frac{343^2}{64^2} = \frac{117649}{64^2}$$

$$\sqrt{y^2 + \frac{343}{32}\,y + \frac{343^2}{64^2}} = \frac{222865}{64^2}$$

$$y + \frac{343}{64} = \frac{472}{64}$$

$$y = \frac{129}{64} = 2\frac{1}{64}$$

Откинемъ дробь $\frac{1}{64}$, по причинѣ ея малости, то выдетъ $y = 2$, $x = 10 + 2$ или $= 12$. Естьлижъ въ данномъ уравненіи $x^3 + 2\,x^2 + 3\,x = 2052$, вмѣсто неизвѣстнаго x примемъ 12, или въ произшедшемъ изъ даннаго уравненіи $y^3 + 32\,y^2 + 343\,y = 822$, вмѣсто неизвѣстнаго y, помѣстимъ 2, то равенство не уничтожится; слѣдовательно $x = 12$.

ПРИ-

ПРИМѢРЪ 2.

Пусть будетъ дано уравненіе

$x^3 - 2x = 5$ Положимъ

$x = 2 + y$, то выдетъ:

$$x^3 = 8 \pm 12y + 6y^2 + y^3$$
$$-2x = -4 - 2y$$
$$5 = 4 + 10y + 6y^2 + y^3$$
$$1 = 10y + 6y^2;\ y^2 + \tfrac{10}{6}y = \tfrac{1}{6}$$
$$+ \tfrac{25}{36} = \tfrac{25}{36}$$
$$\sqrt{y^2 + \tfrac{10}{6}y + \tfrac{25}{36}} = \tfrac{31}{36}$$
$$y + \tfrac{5}{6} = \tfrac{1}{6}\sqrt{31} = \frac{5{,}5677}{6}$$
$$y = \frac{5677}{60000} = 0{,}094$$

Естьли же вмѣсто количества y, принять $0{,}094 + y'$, то выдетъ $y' = 0{,}00055147$. $y = 0{,}09455147$, $x = 2{,}09455147$.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

О рѣшеніи Ариѳметическихъ задачъ.

ЗАДАЧА XXI.

§. 48.

Дана сумма и разность двухъ количествъ, найти самыя количества.

РѢШЕНІЕ ПЕРВОЕ ОСОБЕННОЕ.

Пусть будетъ сумма $= 48$, разность $= 12$, меньшое количество $= x$, большое, или мень-

шое

шое сложенное съ разностью $= x + 12$, то будетъ уравненіе.

$$2x + 12 = 48$$
$$2x = 36$$

Меньшое $x = 18$

большое $x + d = 30$ (§. 39 44.).

РѢШЕНІЕ ВТОРОЕ ВСЕОБЩЕЕ.

Означь данныя количества литерами, чтобъ по учиненіи приведенія, вообще извѣстно было, какимъ образомъ надлежитъ дѣлать рѣшеніе для особенныхъ примѣровъ (§. 27.). На пр.

пусть будетъ сумма $= a$

разность $= d$

меньшое количество $= x$

большое $= x + d$

то будетъ

$$2x + d = a$$
$$2x = a - d$$
$$x = \frac{a - d}{2}$$

Теорема, или правило происходитъ изъ того слѣдующее: *изъ данной суммы вычти данную разность, остатокъ раздѣли на двѣ равныя части, половина покажетъ неизвѣстное меньшое количество, къ сему приложи разность, и произойдетъ большое количество.*

РѢ-

РѢШЕНІЕ ТРЕТІЕ.

Когда неизвѣстныя количества будутЪ означены особливыми литерами, на пр. сумма $= a$, разность $= d$, меньшое количество $= x$, большое $= y$, то будетЪ

$$a = x + y \qquad d = y - x$$
$$a - x = y \qquad d + x = y$$

ЧтобЪ уничтожить y, то уравняй между собою два количества, равняющіяся одному третьему, и будетЪ

$$a - x = d + x$$
$$x \qquad x$$
$$a = d + 2x$$
$$a - d = 2x$$
$$\frac{a - d}{2} = x$$

и такимЪ образомЪ то же прежнее правило опять выходитЪ.

ЗАДАЧА XXII.

§. 49. Найти такія количества, которыхЪ дано содержаніе и разность.

РѢШЕНІЕ ОСОБЕННОЕ.

ПоложимЪ, что разность $= 45$, содержаніе шестерное, или знаменатель содержанія $= 6$, меньшое количество $= x$, большое $= 6x$, то будетЪ уравненіе $5x = 45$, или $x = 9$, что приложивЪ вЪ разности 45, будетЪ большое количество 54.

РѢ-

РѢШЕНІЕ ВСЕОБЩЕЕ.

Положимъ, что разность $= b$, знаменатель содержанія $= e$, меньшое количество $= x$, большое $= ex$, то будетъ уравненіе:

$$ex - x = b$$

$$\text{или } x = \frac{b}{e - i}$$

Теорема: *разность раздѣли на знаменателя содержанія, уменьшеннаго единицею, частное число будетъ меньшое количество.*

ЗАДАЧА XXIII.

§. 50. *Найти такое количество, послѣ котораго бы, какъ будутъ вычтены изъ него двѣ нѣсколькія данныя части, вышелъ данной остатокъ.*

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что неизвѣстное количество $= x$, нѣсколькія части $= e$ и i, остатокъ $= b$, то будетъ уравненіе:

$$x - \frac{x}{e} - \frac{x}{i} = b$$

И приведши дроби къ одному знаменателю, будетъ

$$\frac{eix - ix - ex}{ei} = b$$

$$eix - ix - ex = eib$$

$$x = \frac{eib}{ei - i - e}$$

Тео-

Теорема, или правило: *данной остатокъ умножь на произведеніе знаменателей содержанія, произведеніе раздѣли на то же произведеніе знаменателей, уменьшенное каждымъ знаменателемъ содержанія, и произойдетъ искомое количество*

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 51. Равнымъ образомъ находится правило для остатка послѣ вычитанія трехъ, или многихъ нѣсколькихъ частей.

ЗАДАЧА XXIV.

§. 52. *Дана сумма каждыхъ двухъ чиселъ изъ трехъ, найти оныя три числа.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть будутъ искомыя числа x, y, z, сумма перваго и втораго $= a$, сумма втораго и третьяго $= b$, сумма перваго и третьяго $= c$, то произойдутъ изъ того три уравненія:

$$x + y = a \quad y + z = b \quad x + z = c$$
$$x = a - y \quad z = b - y \quad x = c - z$$

Понеже для количества x находится двоякое уравненіе; того ради будетъ

$$a - y = c - z$$

Въ послѣднемъ членѣ вмѣсто z поставь ему равное $b - y$, и будетъ

$$a - y = c - b + y$$
$$a = c - b + 2y$$
$$a - c + b = 2y$$
$$\frac{a - c + b}{2} = y$$

Сыскавъ y, и прочія неизвѣстныя количества могутъ выведены быть изъ первыхъ уравненій, потому что

$$x = a - y$$
$$z = b - y$$

Положимъ, что $a = 40, b = 28, c = 36$

то будетъ $\frac{40 - 36 + 28}{2} = 16$

$$x = 40 - 16 = 24$$
$$z = 28 - 16 = 12.$$

ЗАДАЧА XXV.

§. 53. *Дана сумма двухъ количествъ и разность ихъ квадратовъ, найти самыя тѣ количества.*

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что сумма $= 2a$, разность квадратовъ $= b$, разность количествъ $= 2x$, то будетъ большое количество $= a + x$,

 мень-

меньшое $= a - x$ (Триг. плоск.), квадраты ихЪ $a^2 + 2ax + x^2$.

$$a^2 - 2ax + x^2$$

разность $4ax = b$

$$x = \frac{b}{4a}.$$

Теорема: *разность квадратовЪ раздѣли на сумму количествЪ, вдвое взятую; частное число покажетЪ половину ихЪ разности.*

Но знавЪ половину разности и половину суммы, будутЪ извѣстны и самыя количества. См. Триг. плоск.

ЗАДАЧА XXVI.

§. 54. *Дано произведенie и разность двухъ количествъ, найти самыя количества.*

РѢШЕНIЕ.

ПоложимЪ, что произведенie $= a$, разность $= b$, большое количество $= x$, меньшое $= y$, то будетЪ двоякое уравненie:

$$xy = a \qquad x - y = b$$

$$x = \frac{a}{y} \qquad x = b + y$$

$$\frac{a}{y} = b + y$$

$$a = by + yy$$

При-

Приложивъ недостаточествующій квадратъ $\frac{1}{4}b^2$ къ неполному квадратическому уравненію (§. 46,), будетъ

$$\tfrac{1}{4}b^2 + a = \tfrac{1}{4}b^2 + by + yy$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + a)} = \tfrac{1}{2}b + y$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + a)} - \tfrac{1}{2}b = y$$

Теорема: *къ квадрату половинной разности приложи произведеніе количествъ, и извлеки квадратной радиксъ, изъ котораго опять вычти половину разности, и останется искомое меньшое количество.*

ЗАДАЧА XXVII.

§. 55. *Доказать правило положенія, въ Ариѳметикѣ предложенное.*

РѢШЕНІЕ.

1. Правило одного положенія употребляется только въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ съ принятымъ по изволенію числомъ не дѣлается другихъ перемѣнъ, кромѣ того, что оно умножается или дѣлится на другія данныя числа. Но во сколько разъ положеніе будетъ больше или меньше искомаго числа, во столько разъ и произведеніе, частное число, или сумма произведеній и частныхъ чиселъ, увеличится и уменьшится. Слѣдовательно найденное по порядку рѣшенія число содержится къ принятому по изволенію числу такъ, какъ данное въ задачѣ къ искомому.

2. Правило двухъ положенiй употребляется тогда, когда принятое по изволенiю число перемѣняется не только чрезъ умноженiе и дѣленiе, но также и чрезъ сложенiе и вычитанiе другихъ данныхъ чиселъ. Положимъ, что искомое число будетъ x, то данное въ задачѣ изобразить можно такимъ образомъ: $ax + b$. Назовемъ первое положенiе p, а второе q, то найденныя по порядку рѣшенiя числа будутъ $ap + b$ и $aq + b$. Естьли оба они меньше даннаго, то первая погрѣшность будетъ $(ax + b) - (ap + b) = ax - ap$, втораяжъ погрѣшность $(ax + b) - (aq + b) = ax - aq$. Произведенiе изъ перваго положенiя p на вторую погрѣшность $ax - aq$, будетъ $apx - apq$; произведенiежъ изъ втораго положенiя q на первую погрѣшность $ax - ap$, будетъ $aqx - apq$, и разность произведенiй $(aqx - apq) - (apx - apq)$ или $aqx - apx$, раздѣлена будучи на разность погрѣшностей $(ax - ap) - (ax - aq)$ или $aq - ap$, производитъ искомое число x.

ЗАДАЧА XXVIII.

§. 56. *Доказать правило смѣшенiя, въ Ариѳметикѣ изъясненное.*

РѢШЕНIЕ.

Положимъ, что цѣна дорогой вещи $= a$, цѣна дешевой $= b$, количество дешевой $= x$,

то

то будетЪ цѢна онаго $= bx$, потому что $1:b = x:bx$; еще положимЪ, что цѢна смѢшенія $= c$, мѢра онаго $= 1$, то будетЪ количество дорогой вещи $= 1 - x$, цѢна онаго $= a - ax$, потому что $1: a = 1 - x: a - ax$; того ради, сложивЪ цѢну обѢихЪ частей, составится данная цѢна смѢшеннаго количества, и произойдетЪ такое уравненіе:

$$a - ax + bx = c$$
$$a = ax - bx + c$$
$$a - c = ax - bx$$
$$\frac{a-c}{a-b} = x, \quad \frac{c-b}{a-b} = 1 - x$$

Теорема: *разность между большою и среднею цѢною должно раздѢлить на разность большой и меньшой цѢны; частное число покажетЪ количество дешевой вещи, сколько оной надлежитЪ смѢшать сЪ дорогою.* ПоложимЪ, что $a = 18$, $b = 12$, $c = 14$, то будетЪ $x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, почему изЪ дорогой надобно взять $\frac{1}{3}$, такимЪ образомЪ $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$. СимЪ доказывается правило смѢшенія, предписанное вЪ АриѳметикѢ.

ЗАДАЧА XXIX.

§. 57. *Данъ вѢсъ тѢла, составленнаго изъ золота и серебра, и притомъ уронъ вѢсу, которой, какъ смѢшанное тѢло, такъ и тѢ два металла, изъ которыхъ оно состоитъ, будучи*

 рас-

равнаго вѣсу, теряютъ въ водѣ: найти доли золота и серебра, которыя находятся въ смѣшанномъ тѣлѣ.

РѢШЕНІЕ.

Пусть будетъ общій вѣсъ $= p$, уронъ вѣсу, которой серебро теряетъ въ водѣ, $= a$, уронъ вѣсу отъ золота $= b$, уронъ вѣсу отъ смѣшаннаго тѣла $= c$, вѣсъ смѣшанной доли серебра $= x$, вѣсъ смѣшанной доли золота $= y$. Понеже извѣстенъ уронъ вѣсу, которой золото и серебро, одного вѣсу со смѣшаннымъ тѣломъ, будучи опущено въ воду, теряетъ, то чрезъ тройное правило могутъ найдены быть уроны вѣсу, соотвѣтствующіе смѣшанной долѣ изъ золота и серебра; ибо показанные уроны, поколику соотвѣтствуютъ вѣсу выдавленной воды, имѣютъ прямое содержаніе количествъ тогожъ металла (§. 19. Идростат.), то есть:

$$p : x = a : \frac{ax}{p}$$

$$p : y = b : \frac{by}{q}$$

Но сумма сихъ уроновъ равняется урону смѣшаннаго тѣла, то есть

$$\frac{ax + by}{p} = c$$

Чтобъ

Чтобъ въ семъ уравненіи уничтожить одно неизвѣстное количество, то вмѣсто y надлежитъ поставить $p - x$, что сдѣлавъ, произойдетъ такое уравненіе:

$$\frac{ax + bp - bx}{p} = c$$

$$ax + bp - bx = pc$$

$$ax - bx = pc - bp$$

$$x = \frac{pc - bp}{a - b}$$

Преврати сіе уравненіе въ пропорцію, и будетъ $a - b : p = c - b : x$.

Теорема для доли смѣшаннаго серебра посылай:

Какъ разность уроновъ вѣсу отъ серебра и золота, потеряннаго въ водѣ, содержится къ общему вѣсу, такъ разность уроновъ вѣсу отъ смѣшаннаго тѣла и золота, потеряннаго въ водѣжъ, будетъ содержаться къ смѣшанной долѣ изъ серебра. Которую сыскавъ, будетъ извѣстна и смѣшанная доля изъ золота.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 58. Такимъ образомъ рѣшится задача Архимедова, которой по прошенію Сиракузскаго Государя *Гіерона* сыскалъ, сколько серебра примѣшано было въ золотую корону, по свидѣтельству Витрувіеву Архитек. кн. 9. гл. 3 Положимъ, что вѣсъ короны = 6 фунт. столькожъ фунтовъ серебра теряютъ своего вѣсу въ водѣ $\frac{3}{32}$

а золота $\frac{3}{10}$, вся же корона теряетъ своего вѣсу $\frac{4}{10}$: то произойдетъ изъ того такая пропорція:

$$\tfrac{3}{5} - \tfrac{3}{10} : 6 = \tfrac{4}{10} - \tfrac{3}{10} : x$$
$$\tfrac{3}{10} : 6 = \tfrac{1}{10} : 2$$

Слѣдовательно два фунта серебра приложены были къ четыремъ фунтамъ золота. См. Шотт. Магіи натуральн. часть III. кн. 5. Синтагм. 2. прагм. 3. стран. 342 и слѣд.

ЗАДАЧА XXX.

§. 59. Нѣкто отдалъ въ проценты на 3 года 1000 руб. а по прошествіи двухъ лѣтъ еще 2000. При концѣ третьяго года получилъ онъ свои деньги вмѣстѣ съ процентами, и того оказалось 3257 руб. $62\frac{1}{2}$ коп. Спрашивается число годовыхъ процентовъ, считая проценты на проценты.

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что каждый рубль по прошествіи года превращается въ неизвѣстное количество x, слѣд. по прошествіи двухъ лѣтъ въ x^2, а по прошествіи трехъ въ x^3, то первая сумма превратится въ 1000 x^3, а вторая въ 2000 x; слѣдственно будетъ

$$1000\,x^3 + 2000\,x = 3257{,}625 \quad (:1000$$
$$x^3 + 2\,x = 3{,}257625$$

Положимъ $x = 1 + y$, то будетъ

$$x^3 = 1 + 3\,y + 3\,y^2 + y$$
$$2\,x^1 = 2 + 2\,y$$
$$3{,}257625 = 3 + 5\,y + 3\,y^2 + y^3$$
$$3{,}257625 = 3 + 5\,y + 3\,y^2 + y^3$$

выч. $3{,}000000$

$$0,257625 = 5y + 3y^2 \quad (:3$$

$$0,085875 = \tfrac{5}{3}y + y^2$$

$$+\tfrac{25}{36} = \tfrac{25}{36}$$

$$\sqrt{\frac{28,0915}{36} = \frac{25}{36} + \frac{5}{3}y + y^2}$$

$$\frac{5,3}{6} = \frac{5}{6} + y$$

$$0,05 = y$$

$$+1 = 1$$

$$1,05 = 1 + y = x$$

Изъ чего явствуетъ, что число годовыхъ процентовъ = 5.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 60. Больше примѣровъ для Ариѳметическихъ задачъ, которыя рѣшены Алгебраическимъ образомъ, можно видѣть во многихъ Авторахъ. См. Лам. Матем. основ. часть II. том. I. Матем. курс. стран. 36. Іо. Керс. основ. Алгебр. кн. 1. гл. 14. І. Стурм. сокращен. Матем. или Матем. табл. стран. 5. Вил. Отред. въ Матем. соч. стран. 87. нарочно изъясняетъ Діофант. задачи. Леонг. Эйлера Универсальную Ариѳметику, съ Нѣм. на Франц. языкъ переведенную ла Гранжемъ, и проч.

ГЛАВА ПЯТАЯ

О рѣшенiи Геометрическихъ задачъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XI.

§. 61.

Конструкцiя Геометрическая (constructio Geometrica) называется такой способъ, помощiю котораго члены Аналитическихъ уравненiй изображаются въ линѣяхъ.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 62. Понеже въ сей практикѣ на мѣсто Аналитическихъ количествъ принимаются линѣи, то надлежитъ примѣчать отношенiе количествъ, которыя содержатся въ уравненiи, и стараться о томъ, чтобъ такоежъ сравненiе наблюдаемо было въ линѣяхъ, чрезъ соединенiе между собою правильнымъ образомъ Ариѳметическихъ и Геометрическихъ истиннъ. Какимъ образомъ сiе можетъ учинено быть, показано будетъ ясными примѣрами.

ЗАДАЧА XXXI.

§. 63. *Сдѣлать конструкцiю простыхъ уравненiй.*

РѢШЕНІЕ.

1. $x = a$; въ семъ уравненiи данной линѣѣ a равняется неизвѣстная x.
2. $x = a + b$, или $x = a - b$; здѣсь явствуетъ, что литера x означаетъ сумму или разность извѣстныхъ линѣй a и b.
3. $x = \frac{a}{b}$ въ семъ случаѣ литера x изображаетъ содержанiе данныхъ линѣй a и b.

4.

4. $x = \frac{ab}{c}$; сдѣлай изъ сего пропорцію, $c:a = b:x$, то x будетъ четвертая пропорціональная линѣя къ тремъ даннымъ c, a, b. (§. 97. Геом.).

5. $x = \frac{ac + bc}{d + b}$, сдѣлай опять пропорцію, $d + b : c = a + b : x$.

6. $x = \frac{ab + cd}{m + n}$, сей случай приведи въ предъидущій, то есть, посылай:

$a:c = d:p$, (§. 97. Геом.).

$ap = cd$ (§. 110. Геом.).

Вмѣсто cd поставь ap, и будетъ такое уравненіе:

$$x = \frac{ab + ap}{m + n}$$

или $m + n : b + p = a : x$

ЗАДАЧА XXXII.

§. 64. *Сдѣлать конструкцію квадратическихъ уравненій.*

РѢШЕНІЕ.

1. $x^2 = ab$, по причинѣ пропорціи, $a : x = x : b$ (§. 110. Ариѳм.).

будетъ x средняя пропорціональная линѣя между a и b (§. 119. Геом.).

2. $x^2 = ab + cd$.

то есть, $x = \sqrt{(ab + cd)}$.

Най-

Найди средніѧ пропорціональныѧ линѣи между a и b, также между c и d.

то есть, $a : m = m : b$, $c : n = n : d$

Почему $x = \sqrt{(mm + nn)}$. Конструкцію сего уравненія показываетъ Теорема Пиѳагорова (§. 193. Геом.), то есть, дѣлается прямоугольной треугольникъ изъ боковъ m и n, ипотенуза покажетъ $\sqrt{(mm + nn)}$.

3. $x^2 = \frac{a^2bc}{mn}$

Сдѣлай $m : a = a : r$

$$mr = aa \text{ и } \frac{mrbc}{mn} = \frac{rbc}{n} = xx$$

также $n : r = b : s$

$$ns = rb \text{ и } \frac{nsc}{n} = sc = xx.$$

или x есть средняя пропорціональная линѣя между s и c.

4. $x^2 = ax + bb$

$x^2 - ax = bb$

$x^2 - ax + \frac{1}{4}aa = bb + \frac{1}{4}aa$

$x = \sqrt{(bb + \frac{1}{4}aa)} + \frac{1}{2}a$ (§. 43.).

Помощію Пиѳагоровой Теоремы находится такой радиксъ, къ которому присовокупляется $\frac{1}{2}a$.

5. Ежели надобно будетъ изобразить линѣею $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - bb)}$, то на $\frac{1}{2}a$, такъ какъ

на

на поперечникѣ, опиши полукружіе, и на оное перенеси A B $= b$, бокъ B C будетъ искомой радиксъ (§. 185. Геом.). Ф. 1.

ЗАДАЧА XXXIII.

§. 65. Въ прямоугольномъ четыреугольникѣ A B C D *написать ромбъ* A E F D. Ф. 2.

РѢШЕНІЕ.

Надлежитъ найти частицу B E или F C, которую должно отсѣчь отъ бока прямоугольнаго четыреугольника, чтобъ остался бокъ ромба. Пусть будетъ A B $= a$, B D $= b$, B E $= x$, то будетъ A E $= \sqrt{(a^2 + x^2)}$ (§. 195. Геом.). Но A E $=$ E D и B E $=$ B D — B E $= b - x$; по Пиѳагоровой же Теоремѣ, □ A B + □ B E = □ A E = □ E D, изъ чего происходитъ слѣдующее уравненіе:

$$a^2 + x^2 = bb - 2bx + xx$$

$$a^2 + 2bx = bb$$

$$2bx = bb - aa$$

$$x = \frac{bb - aa}{2b}$$

Конструкція дѣлается помощію Геометрической пропорціи

$$2b : b + a = b - a : x \text{ (§. 63.)}.$$

Понеже извѣстно, что произведеніе изъ $b + a$ на $b - a$ есть $bb - aa$.

ОПРЕ-

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XII.

§. 66. *Линѣя по среднему и крайнему содержанію раздѣленная* (linea media et extrema ratione secta) называется,
ф. 3. когда составленной изъ цѣлой линѣи AC и меньшой части BC прямоугольной четыреугольникъ равняется квадрату большой части AB. Или, когда вся линѣя AC къ большому отрѣзку AB имѣетъ такое содержаніе, какое большой отрѣзокъ AB къ меньшому BC.

ЗАДАЧА XXXIV.

§. 67. *Раздѣлить линѣю по среднему и крайнему содержанію.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть будетъ вся линѣя AC $= a$, большая доля AB $= x$, то будетъ BC $= a - x$, и

$$a : x = x : a - x$$
$$a^2 - ax = xx$$
$$a^2 = ax + xx$$
$$a^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = xx + ax + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$\sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} - \tfrac{1}{2}a = x$$

Конструкція дѣлается по 4 нум. §. 64.
ф. 4. То есть, ко всей линѣѣ AC приложи подъ прямымъ угломъ половинную ея часть AD, и изъ центра D полупоперечникомъ DC опиши дугу CE, такимъ образомъ будетъ DC $=$ DE $= \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$ (§. 193. Геом.) Но понеже AD $= \tfrac{1}{2}a$, то будетъ AE $= x$.

ЗАДА-

ЗАДАЧА XXXV.

§. 68. *Дана разность боковъ прямоугольнаго треугольчика AE, и перпендикуль BD, которой изъ прямаго угла опущенъ на ипотенузу, найти ипотенузу.* Ф. 5.

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что разность AE $= a$, BD $= b$, ипотенуза AC $= x$, сумма боковъ AB $+$ BC $= y$; того ради большой бокъ AB $= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a$, а меньшой BC $= \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}a$ (§ 50. Триг. плоск.), и по §. 103. Геом. будетъ

$$\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}a^2 = x^2$$
$$y^2 + a^2 = 2x^2$$
$$y^2 = 2xx - aa$$

Но понеже BC : BD $=$ AC : AB (§. 121. Геом.), то будетъ

$$\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}a : b = x : \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}a$$
$$bx = \tfrac{1}{4}yy - \tfrac{1}{4}aa$$
$$4bx = yy - aa$$
$$4bx + aa = yy$$

Поставь въ послѣднемъ уравненіи знаменованіе квадрата $yy = 2xx - aa$, и будетъ

$$4bx + aa = 2xx - aa$$
$$4bx + 2aa = 2xx$$
$$2aa = 2xx - 4bx$$
$$aa = xx - 2bx$$
$$aa + bb = xx - 2bx + bb$$
$$\sqrt{(aa + bb)} + b = x.$$

Изобрази линѣею $\sqrt{(aa + bb)}$ по 4 нум. §. 64, приложи къ немужъ b, и произойдетъ Ф. 6.

детъ ипотенуза x, которую сыскавъ, и самой треугольникъ, коему приличествуетъ данная боковъ разность, составится слѣдующимъ образомъ: сдѣлай прямой уголъ, и съ обѣихъ сторонъ отъ вершины онаго положи найденную линѣю x, то будетъ ипотенуза $GI = \sqrt{2xx}$, на которой опиши полкруга, и въ ономъ проведи хорду $GH = a$, и будетъ $HI = \sqrt{(2xx - aa)} = y$ (§. 195. Геом.); знавши же сумму боковъ $= y$, и разность $= a$, удобно можно будетъ найти самые бока, и изъ оныхъ по томъ составить искомой треугольникъ (§. 50 Триг. плоск.).

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 69. Употребленіе Алгебры въ Геометріи множайшими примѣрами показываютъ Г. Отредъ въ ключ. Матем. Франц. Шоотен. упражнен. Матем. кн. 1. Стурм. въ изъяснен. Матем. и Вольф. Элем. Аналит. гл. 4. Боссю во 2 томѣ курса Мат. Остается теперь показать, какимъ образомъ главное свойство коническихъ и другихъ кривыхъ линѣй изображается Алгебраическимъ уравненіемъ, и откуда выводятся прочія свойства оныхъ.

ГЛАВА

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

О свойствахъ кривыхъ линѣй, особливо-коническихъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XIII.

§. 70.

Когда конусъ ABC пересѣкается плоскостью по линѣѣ IK, параллельной противоположенному конуса боку AB, то происходитъ изъ того кривая линѣя, которая называется *Парабола* (Parabola); естьлижъ сѣченіе сдѣлается чрезъ линѣю HG, такъ что она, будучи продолжена, соединится съ продолженнымъ другимъ конуса бокомъ AC въ точкѣ M, то будетъ *Ипербола* (Hyperbola); наконецъ, ежели сѣченіе будетъ учинено по линѣѣ EL, наклоненной къ оси конуса такимъ образомъ, что оная, будучи продолжена, соединится въ точкѣ O съ продолженнымъ основанія поперечникомъ, то происходитъ *Эллипсисъ* (Ellipſis). И три такія кривыя линѣи, произшедшія изъ сѣченія конуса, называются *коническими сѣченіями*, или *разрѣзами* (ſectiones conicae). ф. 7.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 71. Сіи коническихъ сѣченій имена, заимствованныя отъ свойства оныхъ, первой употребилъ Аполлоній Пергей. Ибо древніе Гео-

метры троякой только разсматривали конусъ, то есть прямоугольной, остроугольной и тупоугольной, плоскостью къ боку его перпендикулярною пересѣченной, и сѣченіе прямоугольнаго конуса *Параболою*, сѣченіе остроугольнаго конуса *Эллипсисомъ*, и сѣченіе тупоугольнаго конуса *Иперболою* назвали. Сіе пространнѣе изъяснено мною въ *Схедіазмѣ* (in Schediasmate), гдѣ приписывается честь Аполлонію въ томъ, что онъ усовершенствовалъ науку о кривыхъ линѣяхъ. Изъ восьмижъ коническихъ книгъ, кои въ третьемъ вѣкѣ прежде Эры Христіанской написалъ Аполлоній, четыре только остались въ цѣлости, и изданы Коммандиномъ на Латин. языкѣ въ Бононіи 1566 года, на которыя книги издалъ Комментаріи Клавдій Ришардъ въ Антверпенѣ 1655 года. Пятуюжъ, шестую и седьмую книгу, изъ Арабской, Равіановой и Голіановой книги, а восьмую изъ свидѣтельствъ Паппа о содержаніи ея дополнилъ, и такимъ образомъ VIII книгъ коническихъ Аполлонія Пергея возстановилъ Эдмундъ Галлей въ Оксфортѣ 1710 года на Лат. О коническихъ разрѣзахъ пространно предлагаютъ Григорій *a s.* Vincentio въ X кн. о квадратурѣ и сѣченіи конуса издан. въ Антверпенѣ 1647 года; Филиппъ де ла Гиръ о сѣченіяхъ коническихъ издан. въ Парижѣ 1685 года; Озанамъ въ тракт. о линѣяхъ перваго роду издан. на франц. языкѣ 1687 года; Маркизъ де л' Опиталь въ Аналитич. тракт. о сѣченіяхъ коническихъ издан. на Фран яз. въ Парижѣ 1707. Къ симъ присовокупить можно превосходныя сочиненія Симпсона и Эйлера.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XIV.

§. 72. Прямая линѣя по срединѣ конической линѣи проведенная AB *ось* (axis),
Ф. 8.

нача-

начало ея A, или точка соединенія оси и кривой линѣи, *Вершина* (vertex), приложенная кЪ оси, и ею на двѣ части раздѣленная линѣя MN *Ордината* Ordinata), половинная той линѣи часть PM *Семіордината* (Semiordinata), часть оси между Вершиною и Ординатою находящаяся AP *Абсцисса* (Abſciſſa) называется.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XV.

§. 73. *Параметрѣ* (Parameter) или *прямой бокѣ* (rectum latus) конической линѣи есть неизмѣняемая линѣя, коей произведеніе на Абсциссу сравнивается сЪ квадратомЪ Семіординаты. *Фокусѣ* же (focus), или *зажигательная точка* есть такая точка оси, гдѣ Ордината равняется Параметру.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XVI.

§. 74. *Діаметрѣ*, или *поперечникѣ* (Diameter) Эллипсиса называется такая ф. 9. линѣя, которая раздѣляетЪ другія прямыя поперечныя линѣи на двѣ равныя части. *Поперечникѣ* же *совокупной* или *соединенной* (Diameter conjugata) BE есть прямая линѣя, которая параллельныя сЪ другимЪ поперечникомЪ AF линѣи пересѣкаетЪ на двѣ равныя части; или соединенной поперечникЪ BE есть

 тотЪ,

томъ, которой другаго поперечника AF Ординатамъ MN параллеленъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XVII.

§. 75. *Поперечной Діаметръ Иперболы* (Transversa Diameter) есть линѣя
Ф. 7. HM, которая между двумя противуположенными сѣченіями верьхняго и нижняго конуса находится.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XVIII.

§. 76. *Линѣи неизмѣняемыя* (immutabiles), или *постоянныя* (constantes) суть тѣ, которыя въ той же кривой линѣѣ всегда имѣютъ одинакую величину. Такія суть Параметръ трехъ коническихъ линѣй, и поперечникъ Эллипсиса и Иперболы; *измѣняемыяжъ* (mutabiles), или *непостоянныя* (inconstantes) суть тѣ, которыя въ той же кривой линѣѣ то прибавляются, то убавляются, какъ на пр. Абсциссы и Ординаты.

ПОЛОЖЕНІЕ.

§. 77. Линѣи постоянныя въ уравненіяхъ первыми алфавита литерами a, b, c; непостоянныяжъ послѣдними x, y, z означаются.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 78. Кромѣ коническихъ линѣй, есть и другія кривыя линѣи, происходящія отъ не-

непрерывнаго движенія нѣкоторой точки, коихъ разсматриванїе есть также не безполезно. Такія суть Циклоида, Конхоида, Квадратрица и Улитковая линѣя; чего ради и описанїе оныхъ не безприлично будетъ здѣсь сообщить.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XIX.

§. 79. *Циклоида* (Cycloïs), или *Трохоида* (Trochoïs) есть кривая линѣя ABC, которая, во время обращенія круга APHN на прямой линѣѣ BC, описывается движеніемъ точки окружности круга A, которая съ начала движенія на крайнюю прямой линѣи точку B, а при концѣ обращенія круга на другую крайнюю точку C упадаетъ. ф. 10.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 80. И такъ чрезъ такое обращенїе вся окружность круга развивается въ прямую линѣю BC, и бываетъ ей равна, и полкруга APH = BH.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 81. Также BF = четверти круга MF, и MD равная четверти круга AP = FH = MP, поneже ME = PG. И потому прямыя линѣи отъ дуги Циклоиды BMA къ окружности APH проведенныя, и съ основанїемъ BH параллельныя, равняются круга производителя дугѣ AP.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 82. О Циклоидѣ есть особливой тракт. Io. Валлиз. Онъ же объявляетъ, что давно уже, прежде Галилея, имѣлъ понятїе о такой линѣѣ нѣкто Бовиллъ, по свидѣтельству его Матем. сочин. около 1310 года издан. и Николай Кузанъ Кардиналъ, какъ то изъ руко-

 пис-

писной его книги въ 1451 году писанной явствуетъ. См. притомъ Аглинскія Философическія Трансакціи 1697 года, и І. Ловѳорп. сокращеніе оныхъ Т. I. стран 116. Объ инструментѣ, которымъ можно начертить Циклоиду, объявляетъ Доппельмаіеръ въ дополнен. Матем. Фабрик. Біоновой Ч. II. стран. 1.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XX.

§. 83. *Конхоида* (Conchois), Никомедомъ изобрѣтенная, происходитъ изъ
ф. 11. того, ежели по прямой управляющей линѣѣ DE другая прямая линѣя AC, около полюса, или точки C, подвигается такимъ образомъ, что движимой линѣи части FD и GE, на управляющей линѣѣ оказывающіяся, всегда равны между собою.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 84. Чѣмъ косѣе движимая линѣя AC имѣетъ свое положеніе къ управляющей линѣѣ, тѣмъ болѣе части GE или FD къ сей наклоняются; однакожъ не могутъ упасть на прямую линѣю DE, но поверьхъ ея всегда должны оказываться. Чего ради Конхоида, хотя мало-помалу ближе и подходитъ къ управляющей линѣѣ, такъ что наконецъ разстояніе обѣихъ линѣй сдѣлается меньше всякой данной линѣи, но ни подъ какимъ видомъ не можетъ соединиться съ оною, и потому называется ἀσύμπτωτος.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXI.

§. 85. Ежели полупоперечникъ AB по четверти круга BND, и бокъ квадрата BC по высотѣ AB, оба равномѣрнымъ
ф. 12. движеніемъ внизъ опускаются, такъ что, когда полупоперечникъ перебѣгаетъ

нѣ-

нѣсколькую часть четверти круга, въ то же время и бокъ квадрата переходитъ подобную часть высоты AB, то кривая линѣя BOE, перерѣзами полупоперечника и помянутаго бока означенная, *τετραγωνίζουσα*, или *Квадратрица* (Quadratrix) называется. Изобрѣтеніе такой линѣи приписывается Диностpату и Никомеду.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 86. И такъ имѣетъ мѣсто здѣсь такая пропорція:

$$BD : ND = AB : MA \text{ или } RO$$

См. Клав. Комментт. къ Эвклид. кн. VI. стран. 648 и слѣд.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXII.

§. 87. Положимъ, что въ какомъ нибудь кругѣ полупоперечникъ AC будетъ движимой, и равномѣрно движимая въ немъ нѣкоторая точка, и естьли полупоперечникъ, въ центрѣ C утвержденной, на окружности круга, а точка на полупоперечникѣ будутъ двигаться такимъ образомъ, что какую часть окружности перебѣжитъ полупоперечникъ, такуюжъ на ономъ перейдетъ и движимая точка, то линѣя, отъ движенія точки произшедшая, *Улитковая* (Spiralis) или *Элица Архимедова* (Helix Archimedis) называется. ф. 13.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 88. И такъ радіи Улитковой линѣи С 1 С 2 и проч. къ полупоперечнику СА имѣютъ такое содержаніе, какое дуги окружности АВ, АВС и проч. чрезъ которыя полупоперечникъ круга между тѣмъ прошелъ, ко всей окружности.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXIII.

§. 89. *Натура кривой* (natura curvae) линѣи называется такое ея свойство, которое происходитъ изъ сравненія постоянныхъ и непостоянныхъ линѣй, внутрь и внѣ кривой линѣи, извѣстнымъ образомъ проведенныхъ, которое сравненіе изображается Алгебраическимъ уравненіемъ.

ЗАДАЧА XXXVI.

§. 90. *Найти натуру круга.*

РѢШЕНІЕ.

Сравни даннаго круга поперечникъ АВ съ его Абсциссами АР, РВ и Семіординатою РМ. Назови $AB = a$, $AP = x$,
ф. 14. $PB = a - x$, $PM = y$. Понеже извѣстно изъ Геометріи (§. 120.), что перпендикулярная линѣя, въ полукружіи на поперечникъ возставленная РМ, есть средняя пропорціональная линѣя между отрѣзками поперечника, то происходитъ изъ того слѣдующая пропорція:

АР:

$$AP : PM = PM : PB$$
$$x\ y = y : a - x$$

которая производитъ уравненіе

$$yy = ax - xx$$

чего ради, понеже сіе уравненіе есть собственное кругу, справедливо оное употребляется для изображенія натуры круга.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 91. Свойство коническихъ сѣченій находится двоякимъ образомъ: или сѣченіе въ конусѣ почитается уже за сдѣланное, чтобъ чрезъ сравненіе боковъ онаго, то есть, Поперечника и Параметра, съ Абсциссами и Ординатами, могло произведено быть такое уравненіе, которое содержитъ въ себѣ свойство сѣченія; или кривая линѣя описывается на плоскости, проводя извѣстнымъ образомъ двѣ прямыя линѣи, взаимно себя пересѣкающія. Первой способъ показываетъ Стурмій въ изъяснен. Матем. кн. II раздѣл. II. стран. 253 и слѣд. Другой способъ употребляетъ Маркизъ де л' Опиталь въ соч. своемъ Аналитическомъ, выше упомянутомъ кн. I. и оной по справедливости первому предпочитается для своей ясности. См. Рейно кн. VIII. стран. 545.

ЗАДАЧА XXXVII.

§. 92. *Найти свойство Параболы.*

РѢШЕНІЕ.

1. Проведи неопредѣленную линѣю AX, и къ ней подъ прямымъ угломъ приложи прямую линѣю AL извѣстной ф. 15.

длины, которая означаетъ Параметръ Параболы. Пусть будутъ двѣ линѣйки RH и AK, и первая изъ оныхъ, наблюдая параллельное положенiе къ оси, двигается на прямой линѣѣ AL, а другая, будучи утверждена въ вершинѣ A, отъ линѣи AL внизъ опускается такимъ образомъ, что прямой линѣи къ оси параллельной разстоянiе RH отъ оси AR равняется перпендикулу NL, опущенному изъ крайней точки прямой линѣи AL на линѣйку AK, внизъ опускаемую.

2. Означь буквами прямыя линѣи, которыя должно сравнивать между собою, то есть Параметръ AL $= p$, Абсцисса AP $= x$, Семiордината PM $= y$, LN $= m$.

3. Понеже явствуетъ изъ фигуры, что прямоугольные треугольники ARM, ALN, APM имѣютъ равные углы, и подобны между собою, то выводится изъ того такая пропорцiя:

$$AL : LN = PM : AP$$

$$p : m = y : x$$

Но какъ AR $=$ PM $=$ LN, то вмѣсто m взявъ y, будетъ

$$p : y = y : x$$

$$yy = px$$

Сiе

Сїе уравненіе показываетъ натуру Параболы, то есть: *въ Параболѣ квадратъ Семіординаты уу равняется прямоугольнику, произшедшему изъ Абсциссы и Параметра* рх.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 93. Слѣдователено Семїордината есть средняя пропорцїональная линѣя между Параметромъ и Абсциссою, а Абсцисса есть третья пропорцїональная линѣя къ Параметру и Семїординатѣ.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 94. Абсциссы содержатся между собою такъ, какъ квадраты Ординатъ, то есть, когда АР $= x$, РМ $= y$, А$p = u$, $pm = z$, то происходятъ такїя уравненїя: Ф. 16.

$$pu = zz \text{ и } px = yy$$

Но понеже pu и px содержатся между собою такъ, какъ u и x (§. 119. Ариѳм), то происходитъ изъ того такая пропорцїя:

$$pu : px = zz : yy$$
$$u : x = zz : yy \text{ (§. 120 Ариѳм.)}.$$

ЗАДАЧА XXXVIII.

§. 95. *Начертить Параболу.*

РѢШЕНІЕ.

1. На прямой линѣѣ LP прими AL за Параметръ Параболы, которую должно начертить. Ф. 17.

2. По томъ возставь неопредѣленную перпендикулярную линѣю A m, и взявъ на линѣѣ LP нѣсколько центровъ, опиши полукружія LMP и проч. и будутъ AP, Аp и проч. Абсциссы, AM,

AM, Am и проч. Семіординаты Параболы.

3. И такъ на ось ея AP перенеси прежде найденныя Абсциссы, и къ онымъ подъ прямымъ угломъ приложи Ординаты, а изъ вершины A чрезъ крайнія точки Ординатъ проведи Параболу.

Другіе способы изъясняетъ Шоотенъ упражнен. Матем. кн. IV. *или* гл. XIII. de organica ſectionum conicarum in plano deſcriptione.

ЗАДАЧА XXXIX.

§. 96. *Найти разстояніе фокуса* F *отъ вершины Параболы.*

РѢШЕНІЕ.

Когда F есть фокусъ, тогда Ордината MN равна Параметру AL (§. 67). И такъ MF = $\frac{1}{2}$ p, и въ такомъ случаѣ для Параболы будетъ слѣдующее уравненіе:

$$\tfrac{1}{4}\, pp = px$$
$$\tfrac{1}{4}\, p = x$$

или четвертая часть Параметра = AF, то есть искомому разстоянію фокуса отъ вершины.

ЗАДАЧА XL.

§. 97. *Найти натуру Эллипсиса.*

РѢ-

РѢШЕНІЕ.

1. Прими А a за ось Эллипсиса, а AL за Параметрѣ. Ф. 19.

2. Прикрѣпи кѣ крайнимѣ поперечника точкамѣ линѣйки АК и a О, движимыя около точекѣ А и a; и естьли соединеніе, или сѣченіе линѣекѣ вѣ точкѣ М сдѣлается такимѣ образомѣ, что будетѣ АО $=$ LN, или разстояніе линѣйки a О отѣ самой вершины будетѣ равно перпендикулу, которой изѣ крайней точки Параметра опущенѣ на верьхнюю линѣйку АК, то точка М будетѣ вѣ Эллипсисѣ.

3. Пусть будетѣ AL $= p$, A$a = a$, PA $= x$, aP $= a - x$, PM $= y$, LN $= m$. Понеже Δ ALN $\backsim$ Δ APM, то будетѣ такая пропорція:

$$AL : LN = PM : AP$$

$$p : m = y : x$$

$$px = my$$

$$\frac{px}{y} = m$$

и понеже Δ AaO $\backsim$ Δ PaM, то будетѣ

$$Aa : AO = aP : PM$$

$$a : m = a - x : y$$

$$ay := ma - mx$$

$$\frac{ay}{a - x} = m = \frac{px}{y}$$

При-

Приведи дроби $\frac{ay}{a-x} = \frac{px}{y}$ къ одному знаменателю, и оной знаменатель уничтожь, такимъ образомъ произойдетъ

$$ayy = apx - pxx$$

$$yy = px - \frac{pxx}{a}$$

То есть, *въ Эллипсисѣ квадратъ Семiординаты равняется прямоугольнику, произшедшему изъ Параметра и Абсциссы, безъ другаго прямоугольника, которой происходитъ изъ Абсциссы на четвертую пропорцiональную линѣю къ Поперечнику, Параметру и Абсциссѣ.*

$$a : p = x : \frac{px}{a}$$

ПРИБАВЛЕНIЕ 1.

§. 98. Ежели первое уравненiе превратится въ такую пропорцiю

$$y^2 : ax - xx = p : a,$$

то квадратъ Семiординаты къ прямоугольнику, произшедшему изъ отрѣзковъ, будетъ имѣть такое содержанiе, какое имѣетъ Параметръ къ поперечнику.

ПРИБАВЛЕНIЕ 2.

Ф. 20. §. 99. Когда $x = AC = \frac{1}{2} a$, то произойдетъ изъ того такая пропорцiя:

$$yy : \tfrac{1}{4} aa = p : a$$

помощiю которой находится величина соединенной оси, понеже изъ предъидущей пропорцiи составляется такое уравненiе:

ayy

$$ayy = \frac{1}{4} aap$$
$$yy = \frac{1}{4} ap$$
$$y = \frac{1}{2} \sqrt{ap}$$
$$2y = \sqrt{ap}$$

И такъ половина соединенной оси будетъ BC, то есть половинная часть средней пропорціональной линѣи между Параметромъ и Поперечникомъ; или цѣлой соединенной поперечникъ BD есть средняя пропорціональная линѣя между Параметромъ и Поперечникомъ. И понеже $4yy = ap$, то будетъ такая пропорція:

$$a : 2y = 2y : p$$

то есть Параметръ p будетъ третья пропорціональная линѣя къ поперечнику и къ соединенному съ онымъ же поперечнику $2y$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 3.

§. 100. Изъ чего также познается содержаніе квадратовъ Семіординатъ. Положимъ $Ap = u$, $pm = z$, то произойдетъ для Эллипсиса уравненіе: Ф. 19.

$$azz = apu - puu$$
$$zz = pu - \frac{puu}{a}$$
$$\text{и } yy = px - \frac{pxx}{a}$$

Но какое содержаніе имѣютъ $zz : yy$, такоежъ будутъ имѣть и равныя имъ количества $pu - \frac{puu}{a}$ и $px - \frac{pxx}{a}$. Почему справедлива слѣдующая пропорція:

$$zz : yy = pu - \frac{puu}{a} : px - \frac{pxx}{a}$$

И понеже умноженіе на одно и то же число не перемѣняетъ содержанія, на пр.

$$zz : yy = apu - puu : apx - pxx$$

и чрезъ дѣленіе на одно тоже число p не перемѣняется содержаніе; того ради будетъ

$$zz : yy = au - uu : ax - xx$$

то есть, квадраты Семіординатъ имѣютъ такое содержаніе, какое прямоугольники, произшедшіе изъ отрѣзковъ поперечника AP. Pa: Ap. pa.

ЗАДАЧА XLI.

§. 101. *Начертить Эллипсисъ.*

РѢШЕНІЕ.

1. Понеже

$$yy = \frac{apx - pxx}{a}$$

то будетъ $y = \sqrt{\frac{(apx - pxx)}{a}}$

Для конструкціи такого количества посылай:

$$a : p = x : \frac{px}{a}$$

по томъ между $\frac{px}{a}$ и $a - x$ найди среднюю пропорціональную линѣю, или Семіординату, соотвѣтствующую принятой Абсциссѣ.

ф.21. 2. А чтобъ найти больше Семіординатъ, то къ поперечнику Aa приложи подъ прямымъ угломъ Параметръ AL, и проведи ипотенузу La, также въ треугольникѣ AaL проведи нѣсколько перпендикулярныхъ линѣй PR и pr, которыя будутъ четвертыя пропор-

ціо-

ціональныя линѣи къ Aa, AL и aP или ap; или полагая $x = aP$ и ap, будетъ PR или $pr = \frac{px}{a}$. По томъ между сими четвертыми пропорціональными линѣями и между $a - x$, или AP, Ap, найди средніе пропорціональныя линѣи, то онѣ будутъ Семіординаты; которыя должно наложить на Абсциссы; и чрезъ крайнія ихъ точки провести Эллипсисъ. Больше рѣшеній объявляетъ Шоотенъ гл. 2 — 5

ЗАДАЧА XLII.

§. 102. *Найти разстояніе фокуса отъ вершины Эллипсиса.*

РѢШЕНІЕ.

Когда MN Параметръ; а F фокусъ Эллипсиса, то будетъ такое уравненіе: Ф. 20.

$$\tfrac{1}{4}pp = px - \frac{pxx}{a} \quad (§. 97.)$$

$$\tfrac{1}{4}app = apx - pxx$$

$$\tfrac{1}{4}ap = ax - xx$$

$$xx - ax = -\tfrac{1}{4}ap$$

Дополнивъ не полное квадратическое уравненіе (§. 43.); будетъ

$$\tfrac{1}{4}aa - ax + xx = \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}ap$$

$$\tfrac{1}{2}a - x = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}ap)}$$

Приложивъ x, и вычетши радиксъ, будетъ

$$\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}ap)} = x = AF.$$

То есть, изслѣдуй радиксъ, сыскавъ среднюю пропорціональную линѣю между $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p$ и $\frac{1}{2}a$, которая будетъ FC, и оную вычетши изъ половины оси AC, останется AF искомое разстояніе фокуса отъ вершины.

ЗАДАЧА XLIII.

ф.20. §. 103. *Найти величину линѣй BF и Bf, которыя изъ двухъ фокусовъ Эллипсиса проводятся къ крайнимъ точкамъ совокупной оси BD.*

РѢШЕНІЕ.

Выше сказано, что FC и $fc = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ap)}$ (§. 102), и нашли уже, что половинной меньшой поперечникъ $BC = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$ (§. 99.) слѣдовательно по Пиѳаг. Теор. (§. 193. Геом.) будетъ

$$\square FC + \square BC = \square BF$$

$$\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}ap = \square BF$$

или $\frac{1}{4}aa = \square BF$

$$\frac{1}{2}a = BF$$

и понеже $BF = Bf$, то видно, что линѣи, изъ фокусовъ къ крайней точкѣ меньшой оси Эллипсиса проведенныя, обѣ вмѣстѣ равняются большой оси. Тоже можно доказать и о другихъ всякихъ линѣяхъ, которыя изъ двухъ фокусовъ проводятся къ точкамъ окружности Эллипсиса.

По-

Положимъ $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ap = c^2$, разстояніе точки Эллипсиса отъ фокуса $= z$, разстояніе Ординаты отъ средней точки C, $= v$, то будетъ

$$x = \tfrac{1}{2}a - v$$

умнож. $a - x = \frac{1}{2}a + v$

$$ax - x^2 = \tfrac{1}{4}a - v^2$$

$$\left(\times \frac{p}{a}\right.$$

$$px - \frac{px^2}{a} = \tfrac{1}{4}ap - \frac{pv^2}{a}$$

или $yy = \frac{1}{4}ap - \frac{p}{a}v^2$

$$+ (c - v)^2 = c^2 - 2cv + v^2$$

$$z^2 = c^2 + \tfrac{1}{4}ap - 2cv + \left(1 - \frac{p}{a}\right)v^2$$

но $c^2 + \frac{1}{4}ap = \frac{1}{4}a^2$; $1 - \frac{p}{a} = \frac{4c^2}{a^2}$

слѣд. $z^2 = \frac{1}{4}a^2 - 2cv + \frac{4c^2v^2}{a^2}$

$$\sqrt{}$$

$$z = \tfrac{1}{2}a - \frac{2cv}{a}$$

 По-

Положимъ разстояніе той же точки Эллипсиса отъ другаго фокуса $= z'$, то поелику

$$yy = \tfrac{1}{4}ap - \frac{p}{a}v^2$$

$$\text{и } (c + v)^2 = c^2 + 2cv + v^2$$

будетъ $z'^2 = c^2 + \tfrac{1}{4}ap + 2cv + (1 - \frac{p}{a})v^2$

но $c^2 + \tfrac{1}{4}ap = \tfrac{1}{4}a^2$; $1 - \frac{p}{a} = \frac{4c^2}{a^2}$;

слѣд. $z'^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + 2cv + \frac{4c^2v^2}{a^2}$

$$\sqrt{}$$

$$z' = \tfrac{1}{2}a + \frac{2cv}{a}$$

$$+ z = \tfrac{1}{2}a - \frac{2cv}{a}$$

$z + z' = a$, что надлежало доказать.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 104. Удобнѣйшій способъ для черченія Эллипсиса происходитъ изъ предыдущаго доказательства, то есть, чрезъ воткнутые на доскѣ гвоздья опредѣляется разстояніе фокусовъ, и около оныхъ гвоздей обводится нитка произвольной длины, имѣющая концы связанные, и по томъ вложеннымъ чѣмъ нибудь острроконечнымъ описывается Эллипсисъ.

ЗАДАЧА XLIV.

§. 105. *Найти свойство Иперболы.*

РѢ-

РѢШЕНІЕ.

Взявъ поперечной діаметръ A a, къ краямъ онаго приложи двѣ подвижныя линѣйки, и наблюдая тѣ же правила, какія въ разсужденіи происхожденія Эллипсиса предписаны были, подвигай оныя такимъ образомъ, чтобъ, принявъ AL за Параметръ, было AK = LN. Что сдѣлавъ, по причинѣ Δ ALN ∽ Δ APM, произойдетъ такая пропорція: Ф. 22.

$$AL : LN = PM : AP$$

$$p : m = y : x$$

$$px = my$$

$$\frac{px}{y} = m$$

и по причинѣ Δ A a K ∽ Δ a PM

$$Aa : AK = aP : PM$$

$$a : m = a + x : y$$

$$ay = ma + mx$$

$$\frac{ay}{a+x} = m = \frac{px}{y}$$

сдѣлавъ приведеніе дробей, будетъ

$$ayy = apx + pxx$$

$$yy = px + \frac{pxx}{a}$$

Въ Иперболѣ квадратъ Семіординаты yy *равняется прямоугольнику, происходящему изъ Абсциссы и*

Параметра px, *вмѣстѣ съ прямоугольникомъ, произшедшимъ изъ Абсциссы и четвертой пропорціональной линѣи къ поперечнику, Параметру и Абсциссѣ.*

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 106. Почему уравненїе Иперболы отъ уравненїя Эллипсиса разнствуетъ только знакомъ, то есть въ Эллипсисѣ должно вычесть прямоугольникъ $\frac{pxx}{a}$ изъ px, а въ Иперболѣ должно приложить тотъ же прямоугольникъ къ px.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 107. Изъ чего также явствуетъ происхожденїе имянъ *Параболы* Παϱαβολῆς, *Эллипсиса* Ἐλλείψεως, *Иперболы* Ὑπεϱβολῆς. Парабола есть линѣя равенства, въ которой $px = yy$, Эллипсисъ линѣя недостатка, понеже $px - \frac{pxx}{a} = yy$, а Ипербола линѣя излишества, потому что $px + \frac{pxx}{a} = yy$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 3.

§. 108. Въ Иперболѣ также имѣетъ мѣсто пропорція:

$$y^2 : ax + xx = p : a$$

ПРИБАВЛЕНІЕ 4.

§. 109. Для сысканїя Семїординатъ, понеже $y = \sqrt{\frac{apx + pxx}{a}}$, сперва находятся четвертыя пропорцїональныя линѣи $\frac{px}{a}$ чрезъ такую пропорцїю $a : p = x : \frac{px}{a}$, по томъ сыскиваются

сред-

среднія пропорціональныя линѣи между $\frac{px}{a}$ и $a + x$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 5.

§. 110. Также квадраты Семіординатѣ содержатся между собою, какѣ $uu + uu$ $ux + xx$, или какѣ прямоугольники a P. AP и ap. Ap.

ПРИБАВЛЕНІЕ 6.

§. 111. Разстояніе фокуса отѣ вершины есть $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ap)} - \frac{1}{2}a$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 7.

§. 112. Какѣ вѣ Эллипсисѣ сумма линѣй изѣ двухѣ фокусовѣ, ко всякой точкѣ окружности проведенныхѣ, равняется большой оси (§. 103), такѣ напротивѣ того вѣ Иперболѣ разность линѣй, проведенныхѣ изѣ фокусовѣ ко всякой точкѣ Иперболы, равняется поперечнику A a. Доказательство такое же, какѣ вѣ Эллипсисѣ.

ЗАДАЧА XLV.

§. 113. *Начертить Иперболу.*

РѢШЕНІЕ.

1. На прямой неопредѣленной линѣѣ f P ф. 23. возьми поперечной бокѣ, или поперечную ось a A, и сѣ оною соедини равныя разстоянія фокуса отѣ вершины af и AF.
2. По томѣ изѣ нижняго фокуса F, по изволенію взятымѣ раствореніемѣ циркула, по обѣ части оси начерти дуги; по изволеніюжѣ взятое раствореніе, такѣ какѣ Абсциссу, изѣ вершины A внизѣ перенеси на ось.
3. Наконецѣ возьми циркулемѣ сумму поперечнаго діаметра a A и Абсциссы

 AP,

АР, или линѣю a Р, и одну ножку циркула поставивъ въ верьхнемъ фокусѣ f, нижнія дуги съ обѣихъ сторонъ пересѣки другими; и естьли больше такихъ дугъ, взаимно себя пересѣкающихъ, изъ нижняго и верьхняго фокуса проведено будетъ, то изъ вершины А чрезъ точки перерѣзовъ М можетъ описана быть Иперболл. Основаніе сей практики заключается въ предъидущемъ прибавленіи. (§. 112.) См. притомъ Шоотен. гл. 9.

ТЕОРЕМА II.

§. 114. *Ежели сѣченіе Иперболы* DEF *учинится параллельно съ плоскостью оси конуса, то бока конуса* AB *и* AC *будутъ Асимптоты Иперболы, которыя хотя и приближаются всегда къ продолженной Иперболѣ, но не соединяются съ нею.*

Ф. 23.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Вопервыхъ должно доказать, что бока конуса, естьли продолжатся вмѣстѣ съ Иперболою, отъ часу ближе всегда приближаются къ оной. Что хотя изъ образца вещественнаго конуса нѣсколько уже и понять можно, однако по Геометрически доказывается такимъ образомъ:

ко-

когда увеличивается конусъ, то увеличивается и его полупоперечникъ BL или LG, а линѣи перпендикулярныя EG и FK, или прямые синусы опущенные на полупоперечники BL и LC, понеже измѣряютъ разстоянїе сѣченія отъ плоскости оси, не перемѣняются, потому что сѣченїе параллельно съ плоскостью оси конуса. Но когда увеличивается полупоперечникъ, или синусъ цѣлой BL, а синусъ прямой EG не перемѣняется, тогда содержанїе синуса прямаго къ цѣлому непрерывно умаляется, или меньшой синусъ EG болѣе содержится въ большомъ полупоперечникѣ BL, нежели въ меньшомъ; въ прямоугольномъ же треугольникѣ содержанїе синусовъ къ полупоперечнику вмѣстѣ съ соотвѣтствующими имъ углами уменьшается; чего ради, когда увеличивается полупоперечникъ BL, и не перемѣняется прямой синусъ EG, тогда уголъ ELG умаляется, и понеже прямой уголъ при E не перемѣняется, что помаленьку убываетъ у величины угла ELG, то самое прибавляется къ другому косому углу EGL, съ которымъ вмѣстѣ увеличивается также и противоположенной ему синусъ EL, а синусъ обращенной BE ума-

 ляет-

ляется, понеже оный содержится къ прямому синусу, такъ какъ прямой синусъ къ суммѣ полупоперечника и синуса дополнительнаго; изъ чего явствуетъ, что разстояніе BE, между бокомъ конуса и Иперболою находящееся, непрестанно умаляется, и Ипербола къ боку конуса помаленьку подходитъ ближе. А что не можетъ она соединиться съ боками онаго, сіе ясно разумѣть можно изъ того, понеже сѣченіе Иперболы принимается за учиненное внѣ средней плоскости оси, гдѣ поперечникъ всегда бываетъ больше всякой хорды GK, проведенной внѣ круга (§. 128. Геом.), слѣдовательно сѣченіе Иперболы и проч. Ч. и. д.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 115. Для лучшаго примѣчанія и облегченія сего доказательства полезно имѣть деревянной конусъ, въ которомъ сѣченіе Иперболы учинено правильнымъ образомъ. Впрочемъ само по себѣ явствуетъ, что такое приближеніе безъ соединенія въ Иперболѣ, чѣмъ нибудь остроконечнымъ начерченной, самымъ дѣломъ не можетъ изображено быть. Между тѣмъ довольно и того, что мы своими мыслями до того не простираемся, чтобъ разумѣть, гдѣ и когда разстояніе, между прямою и кривою линѣею находящееся, перестаетъ быть раздѣлимое, хотя никто не сомнѣвается въ томъ, что Ипербола къ своей Асимптотѣ наконецъ такъ близко подходитъ, что

раз-

разстоянїе обѣихъ дѣлается меньше всякой означаемой линѣи. См. Франц. Бароц. кн. о удивительной Геометрической задачѣ, 13 способами доказанной, которая учитъ означать линѣи Асимптотъ, издан. въ Венецїи 1586 года. Берн. Лам. въ предувѣд. Матем. Элем. къ концу, о раздѣленїи величины до безконечности, говоритъ такимъ образомъ: Mais si ce traitè fait voir l' etendue de l' esprit, il fait aussi connoitre ses bornes, car il y a des demonstrations claires & convainçantes, qu' une grandeur finie est divisible jusqu' à l' infini. Cette infinitè est incomprehensible: cependant on en fait connoitre les proprietès, les rapports: ce qu' il demontre, qu' il y a des veritès qui sont egalement certaines & incomprehensibles, & que par consequent les veritès que la religion nous enseigne, ne doivent pas être suspectes, parce qu' elles sont incomprehensibles. См. при томъ стран. 298 и выше § 196. Геом. Цѣлое Ламїево предувѣдомленїе, разными полезными наставленїями преисполненное, достойно того, чтобъ всякъ обучающїйся свободнымъ наукамъ не одиножды прочитывалъ оное.

ЗАДАЧА XLVI.

§. 116. *Изобразить уравненїемъ свойство Циклоиды.*

РѢШЕНIЕ.

Прими полкруга APH вмѣсто линѣи Абсциссъ, и назови AP $= x$, PM $= y$, APH $= c$, BH $= d$. Описанїе Циклоиды (§. 81.) показываетъ слѣдующую пропорцїю: ф. 16.

APH:

$$APH : BH = AP : PM$$
$$c : d = x : y$$
$$dx = cy$$
но понеже $c = d$ (§. 80), то будетЪ
$$x = y$$

То есть, *вЪ Циклоидѣ отрѣзанная частица отЪ полукруга равняется Семіординатѣ, находящейся между Циклоидою и Абсциссою.* См. Рейно стран. 595.

ЗАДАЧА XLVII.

ф. 12. §. 117. *Найти свойство Квадратрицы.*

РѢШЕНІЕ.

Назови четверть круга $BND = a$, $ND = x$, $AB = r$, $MA = OR = y$. Происхожденіе Квадратрицы (§. 86.) требуетЪ такой пропорціи:
$$BD : ND = AB : OR$$
$$a : x = r : y$$
$$ay = xr.$$

То есть, *вЪ Квадратрицѣ произведеніе изЪ четверти круга на синусЪ Квадратрицы равняется произведенію изЪ полупоперечника на частицу четверти круга* ND, *противоположенную синусу Квадратрицы.*

ПРИ-

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 118. И потому $\frac{ay}{r} = x$, то есть, всякая частица четверти круга ND есть четвертая пропорціональная линѣя къ полупоперечнику, къ четверти круга, и синусу Квадратрицы.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 119. Понеже какъ для Циклоиды, такъ и для Квадратрицы, чрезъ сравненіе только прямыхъ линѣй, не можетъ составлено быть уравненіе, но частицы кривой линѣи вмѣшиваются въ оную; того ради явствуетъ, что съ такимъ уравненіемъ труднѣе поступать, и по той причинѣ такія кривыя линѣи имѣютъ различную натуру отъ круга и коническихъ линѣй. И такъ Лейбницій иныя кривыя линѣи Геометрическими и Алгебраическими, а иныя Трансцендентальными называетъ. То есть, *кривыя линѣи Геометрическія*, или *Алгебраическія* суть тѣ, коихъ свойство изъясняется такимъ уравненіемъ, которое не требуетъ никакой квадратуры кривой линѣи, каковыя линѣи суть кругъ и сѣченія конуса; *Механическіяжъ* (Mechanicae), или *Трансцендентальныя* (Transcendentes) называются такія кривыя линѣи, въ коихъ уравненіе, изображающее свойство кривой линѣи, требуетъ квадратуры кривой же линѣи, случившейся въ уравненіи. На пр. Циклоида, Квадратрица и проч. См. Act. Erud. Lipſ. 1684. год. стран. 233, и Рейнъ стран. 593.

ГЛАВА

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

О Дифференціальномъ и Интегральномъ изчисленіи.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXIV.

§. 120. *Количество постоянное* есть то, которое величины своей не перемѣняетъ, между тѣмъ какъ другія увеличиваются или уменьшаются. Послѣднія количества называются *перемѣнныя.*

ПОЛОЖЕНІЕ.

§. 121. Постоянныя количества изображаются первыми буквами, на пр. a, b, c, и пр. а перемѣнныя послѣдними, на пр. x, y, z.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXV.

§. 122. *Функція* перемѣннаго количества есть такое количество, которое къ прежнему всегда имѣетъ одинакое отношеніе. На пр. въ уравненіи $x^2 + xy = y^2 + ay + bx$, x есть функція количества y, а y функція количества x. Ежели одно изъ сихъ количествъ принято будетъ за Абсциссу; то другое представлять будетъ Ординату кривой линѣи

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXVI.

§. 123. Пусть будетъ x функція количества y, и между тѣмъ какъ y превратится въ $y + o$, положимъ, что x превратится въ $x + n$. Естьли o будетъ уменьшаться, и наконецъ изчезнетъ, то содержаніе $n : o$ при-

приближаться будетъ къ нѣкоторому постоянному содержанію, такъ какъ къ своему предѣлу, и сей предѣлъ называется *содержаніемъ Дифференціальнымъ* количествъ x и y, а изчезающія приращенія или разности n и o именуются *Дифференціалами* количествъ x и y.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXVII.

§. 124. *Дифференціальное изчисленіе* есть способъ, по данному отношенію между перемѣнными количествами находить отношеніе между ихъ Дифференціалами.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 125. Слѣдующія задачи заключаютъ въ себѣ главныя правила сего изчисленія.

ЗАДАЧА XLVIII.

§. 126. *Найти Дифференціальное содержаніе количествъ x и y, въ уравненіи $a^{m-1}x = y^m$.*

РѢШЕНІЕ.

Въ семъ случаѣ $a^{m-1}(x+n) = (y+o)^m$; слѣдовательно (§. 33.)

$$a^{m-1}(x+n) = y^m + my^{m-1}o + \frac{m.m-1}{1.2}y^{m-2}o^2 + \text{и пр.}$$

$$a^{m-1}x = y^m$$

$$a^{m-1}n = \ldots my^{m-1}o + \frac{m.m-1}{1.2}y^{m-2}o^2 + \text{и пр.}$$

$$a^{m-1}\cdot\frac{n}{o} = my^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}y^{m-2}o + \text{и пр.}$$

и

и когда n и o уничтожатся; тогда выдетъ $a^{m-1} . \frac{n}{o} = my^{m-1}$; и такъ искомое содержаніе Дифференціаловъ $\frac{n}{o}$ будетъ равно содержанію $\frac{my^{m-1}}{a^{m-1}}$, или, полагая $a = 1$, будетъ $\frac{n}{o} = my^{m-1}$, $n = my^{m-1} o$.

ПОЛОЖЕНІЕ.

§. 127. Дифференціалъ перемѣннаго количества изображается буквою d, передъ онымъ количествомъ поставленною. Такимъ образомъ уравненіе $n = my^{m-1} o$, будетъ $dx = my^{m-1} dy$.

ЗАДАЧА XLIX.

§. 128. *Найти Дифференціалъ произведенія* $xy = z$, *или сыскать уравненіе между* x, y, dx, dy, dz.

РѢШЕНІЕ.

Поелику $4z = (x+y)^2 - (x-y)^2$, то будетъ $4dz = 2(x+y)(dx+dy) - 2(x-y).(dx-dy)$ (§. 126), и раздѣливъ на 2, выдетъ

$$2dz = (x+y).(dx+dy) - (x-y).(dx-dy)$$
$$= xdx + ydx + xdy + ydy$$
$$- xdx + ydx + xdy - ydy$$
$$2dz = \ldots 2ydx + 2xdy$$
$$\text{и } dz = \ldots ydx + xdy$$

ЗА-

ЗАДАЧА L.

§. 129. *Найти дифференціалъ частнаго числа* $\frac{x}{y} = u$.

РѢШЕНІЕ.

$x = uy$, слѣд. $dx = udy + ydu$ (§. 128)

$$dx - udy = ydu$$

$$\frac{dx}{y} - \frac{udy}{y} = du = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}$$

$$du = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

ЗАДАЧА LI.

§. 130. *Найти дифференціальное уравненіе количествъ* u *и* w, *въ данномъ уравненіи* $\sqrt[n]{u^m} = w = n^{\frac{m}{n}}$, *гдѣ* m *и* n *суть цѣлыя числа.*

РѢШЕНІЕ.

$u^m = w^n$, слѣд. $mu^{m-1}du = nw^{n-1}dw$,

$= nu^{\frac{m}{n}.(n-1)}dw = nu^{m-\frac{m}{n}}dw$; и

потому $mu^{m-1}du = nu^{m-\frac{m}{n}}dw$.

$$\frac{m}{n}u^{\frac{m}{n}-1}.du = dw.$$

ЗАДАЧА LII.

§. 131. *Найти дифференціальное уравненіе количествъ u и y, съ даннымъ уравненіи* $\frac{1}{u^r} = y$, *или* $y = u^{-r}$.

РѢШЕНІЕ.

$1 = yu^r$, и понеже дифференціалъ единицы, такъ какъ постояннаго количества, есть o, то будетъ $o = y\,ru^{r-1}du + u^r dy$

или, понеже $y = u^{-r}$, $o = ru^{-1}du + u^r dy$

$$-ru^{-1}du = u^r dy$$

$$-ru^{-r-1}du = dy.$$

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 132. Слѣдовательно, естьли $x = y^m$, то $dx = my^{m-1}dy$, хотя m будетъ цѣлое, хотя ломаное, положительное, или отрицательное число.

ЗАДАЧА LIII.

§. 133. *Найти всеобщее изображеніе степени двучленнаго радикса, такъ чтобъ показатель могъ быть не только цѣлое число, но и ломаное, и не только положительное, но и отрицательное.*

РѢ-

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что

$$(1 + y)^m = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + \text{ и пр.}$$

то будетъ

$$m(1 + y)^{m-1} dy = Ady + 2Bydy + 3Cy^2dy + \text{ и пр.}$$

$$m(1 + y)^{m-1} = A + 2By + 3Cy^2 + \text{ и пр.}$$
$$\times \quad 1 + y = 1 + y$$

$$m(1 + y)^m = A + 2By + 3Cy^2 + \text{ и пр.}$$
$$+ Ay + 2By^2 + \text{ и пр.}$$

но $m(1 + y)^m = m + mAy + mBy^2 +$ и пр.

слѣд. $A + 2By + 3Cy^2 +$ и пр.
$+ Ay + 2By^2 +$ и пр.
$= m + mAy + mBy^2 +$ и пр.

и потому

$A = m$	$A = m$
$2B + A = mA$	$B = \frac{m-1}{2} A$
$3C + 2B = mB$	$C = \frac{m-2}{3} B$
и пр. и пр.	и пр. и пр.

или: $A = m$, $B = \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}$, $C = \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

слѣдовательно

$$(1+y)^m = 1 + my + \frac{m.m-1}{1.2} y^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} y^3$$
$+$ и пр.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXVIII.

§. 134. *Интегралъ* или *сумма* дифференціала, есть самое то количество, къ которому принадлежитъ дифференціалъ. На пр. x есть интегралъ дифференціала dx.

ПОЛОЖЕНІЕ.

§. 135. Интегралъ изображается буквою $\int$, передъ дифференціаломъ поставленною. На пр. $\int dx = x$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXIX.

§. 136. *Интегральное изчисленіе* есть способъ, по данному отношенію между дифференціалами, находить отношеніе между самыми количествами, къ которымъ принадлежатъ данные дифференціалы.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 137. Ежели $dx = my^{m-1} dy$, то $x = y^m$ (§. 126.
$dz = ydx + xdy$, $z = xy$ §§. 128.).
$dz = \frac{ydx - xdy}{y^2}$, $z = \frac{x}{y}$ (§. 129.).

Но понеже дифференцїалъ перемѣннаго количества не перемѣняется, естьли къ сему послѣднему присово-

ку-

жупится постоянное (constans), то предъидущїя уравненїя собственно изображены быть должны слѣдующимъ образомъ:

$$\int my^{m-1}dy = y^m + \text{Const.}$$
$$\int (ydx + xdy) = xy + \text{Const.}$$
$$\int \left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right) = \frac{x}{y} + \text{Const.}$$

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 138. Предъидущїя уравненїя изображаютъ начальныя правила интегральнаго изчисленїя.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXX.

§. 139. Положимъ, что x изображаетъ Абсциссу, y Ординату нѣкоторой кривой линѣи, и что въ началѣ Абсциссы Ордината $y = 1$; а когда Абсцисса $x = 1$, тогда Ордината $y = c$; притомъ, ежели Абсциссы составляютъ Аривметическую прогрессїю, то Ординаты состоятъ въ прогрессїи Геометрической. Такая линѣя имѣетъ названїе *Логаривмической*, или *Логаривмики.*

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 140. Содержанїе $1 : y$ состоитъ изъ столькихъ содержанїй $1 : c$, сколько разъ 1 въ x содержится. Естьли же x будетъ ломаное число, то въ семъ случаѣ часть содержанїя $1 : c$ нѣсколько разъ берется. На пр. естьли $x = \frac{7}{2}$, то $1 : y = 1 : c^{\frac{7}{2}} = (1 : c^{\frac{1}{2}})^7$; $y = c^{\frac{7}{2}}$. Слѣдовательно свойство Логаривмической линѣи изображается уравненїемъ $y = c^x$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 141. Ежели x превратится въ $x+m$, то c^x превратится въ c^{x+m}, разность обѣихъ Ординатъ будетъ $c^{x+m} - c^x = c^x(c^m - 1)$, и содержаніе разности Ординатъ къ разности Абсциссъ будетъ $= c^x . (c^m - 1) : m$.

$$= y . (c^m - 1) : m$$

Положимъ $c = 1 + b$, то будетъ $c^m = 1 + mb + \frac{m . m-1}{1 . 2} b^2 +$ и пр. (§. 133).

$$c^m - 1 = mb + \frac{m . m-1}{1 . 2} b^2 + \text{и пр.}$$

$$\frac{c^m - 1}{m} = b + \frac{m-1}{2} b^2 + \text{и пр.}$$

И когда m превратится въ dx или въ o, тогда $\frac{c^m - 1}{m}$ превратится въ $\frac{o}{o} = \frac{b^2}{2} +$ и пр. слѣдовательно не уничтожится, но имѣть будетъ постоянную нѣкоторую величину; въ семъ случаѣ $y . (c^m - 1) : m = dy : dx$, слѣд. $dx = \frac{m}{c^m - 1} . \frac{dy}{y} = a . \frac{dy}{y}$. И такъ дифференціальное уравненіе Логариѳмики, есть $dx = \frac{ady}{y}$ или $\frac{ydx}{dy} = a$.

ПРИ-

ПРИБАВЛЕНІЕ 3.

§. 142. Слѣдственно $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{y}$, и потому $\frac{x}{a} = \int \frac{dy}{y}$, то есть, $\frac{x}{a}$ должна быть такая функція количества y, чтобъ дифференціалъ ея былъ $\frac{dy}{y}$. Изъ уравненія $y = c^x$, слѣдуетъ уравненіе $\log. y = x \log. c$, или $ly = x$, чего ради $\frac{ly}{a} = \int \frac{dy}{y}$, $ly = a\int \frac{dy}{y}$. Слѣдовательно интегралъ $\int \frac{dy}{y}$ будучи умноженъ постояннымъ количествомъ a, производитъ логариѳмъ количества y.

ЗАДАЧА LIV.

§. 143. *Найти логариѳмъ даннаго числа, посредствомъ безконечной строки.*

РѢШЕНІЕ.

Положимъ $y = 1 + u$, то будетъ $dy = du$, $dx = a. \frac{du}{1+u}$, или раздѣливъ du на $1 + u$, $a\,(du - udu + u^2du - u^3du +$ и пр.$)$ слѣдовательно $x =$ $a.(u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 +$ и пр.$)$ (§. 137) то есть, $l.\,(1 + u) = a\,(u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 +$ и проч.$)$. Ежели количество u будетъ отрицательное, то выдетъ $l.(1 - u) = a(-u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 -$ и пр.$)$

и потому

$$l.(1+u) - l.(1-u) \text{ или } l.\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

$$= 2a\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + \text{и пр.}\right)$$

Положимъ искомое число

$$n = \frac{1+u}{1-u}, \text{ то будетъ } u = \frac{n-1}{n+1},$$

$$ln = 2a.\left(\frac{n-1}{n+1} + \frac{(n-1)^3}{3(n+1)^3} + \frac{(n-1)^5}{5(n+1)^5} + \text{и пр.}\right)$$

Количество a опредѣлится, когда ln будетъ $= 1$, ибо тогда $n = c$, $\frac{1}{a} = 2\left(\frac{c-1}{c+1} + \frac{(c-1)^3}{3(c+1)^3} + \frac{(c-1)^5}{5(c+1)} + \text{и пр.}\right)$. На пр. въ обыкновенныхъ логариѳмическихъ таблицахъ $c = 10$, слѣдовательно $\frac{1}{a} = 2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.\ 11^3} + \frac{9^5}{5.\ 11^5} + \text{и пр.}\right)$

$$= 2,302585 \ldots$$

$$a = 1 : 2,302585 = 0,434294.$$

ЗАДАЧА LV.

§. 144. *По данному логариѳму найти число посредствомъ безконечной строки.*

РѢШЕНІЕ.

Понеже $ydx = ady$, притомъ $y = 1 + u$, то будетъ $dx + udx = adu$.

Поло-

Положимъ $u = Ax + Bx^2 + Cx^3 +$ и пр. то будетъ

$adu = aAdx + 2aBxdx + 3aCx^2dx +$ и пр.

$dx + udx = dx + Axdx + Bx^2dx +$ и пр.

Слѣдовательно

$aA = 1, \quad A = \frac{1}{a}$

$2aB = A, \quad B = \frac{A}{2a} = \frac{1}{2a^2}$

$3aC = B, \quad C = \frac{B}{3a} = \frac{1}{3.2.a^3}$

и пр. и пр.

Чего ради

$$u = \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3.2\,a^3} + \frac{x^4}{4.3.2\,a^4} + \text{и пр.}$$

Положимъ $\frac{x}{a} = z$, то будетъ

$$u = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2.1} + \frac{z^3}{3.2.1} + \frac{z^4}{4.3.2.1} + \text{и пр.}$$

$$1 + u = 1 + \frac{z}{1.} + \frac{z^2}{2.1} + \frac{z^3}{3.2.1} + \frac{z^4}{4.3.2.1.} + \text{и пр.}$$

или

$$y = 1 + \frac{ly}{a} + \frac{(ly)^2}{2a^2} + \frac{(ly)^3}{3.2a^3} + \text{и пр.}$$

или

$$y = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2.1} + \frac{z^3}{3.2.1} + \text{и пр.}$$

ЗАДАЧА LVI.

§. 145. *Найти* c, *ежели* a = 1.

РѢШЕНІЕ.

Въ семъ случаѣ уравненіе

$$y = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2.1} + \frac{z^3}{3.2.1} + \text{и пр.}$$ превратится въ слѣдующее:

$$c = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2.1} + \frac{1}{4.3.2.1} \text{ и пр. или}$$

$c = 2,718281\ldots$

ГЛАВА ОСЬМАЯ.

О употребленіи дифференціальнаго и интегральнаго изчисленія, въ изслѣдованіи свойствъ, и въ измѣреніи кривыхъ линѣй.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXXI.

§ 146. *Субтангенсъ* есть прямая линѣя, заключающаяся между тѣми точками Абсциссы, въ которыхъ она пересѣкается Тангенсомъ или касательною линѣею, и Ординатою. Или, *Субтангенсъ* есть четвертая пропорціональная линѣя къ дифференціаламъ Ординаты, Абсциссы, и къ Ординатѣ.

ЗАДАЧА LVII.

§. 147. *По данному отношенію между Абсциссою и Ординатою, найти отношеніе между сими линѣями и Субтангенсомъ.*

РѢШЕНІЕ.

Поелику Субтангенсъ есть четвертая пропорціональная линѣя къ дифференціалу Ординаты, дифференціалу Абсциссы, и къ Ординатѣ, то надлежитъ сперва найти дифференціальное уравненіе Абсциссы и Ординаты, а по томъ, въ изображеніи Субтангенса $= \frac{ydx}{dy}$, на мѣсто содержанія $\frac{dx}{dy}$, поставить равное оному содержаніе, представляющее функцію количествъ x и y. На пр. въ Эллипсисѣ $y^2 = px - \frac{p}{a} x^2$, $2\,ydy = pdx - \frac{2p}{a} xdx$, $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{ap - 2px}$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{2\,ay^2}{ap - 2\,px} = a\,y^2 : \tfrac{1}{2}\,a\,p - p\,x = apx - px^2 : {}^1\,ap - px = ax - x^2 : \tfrac{1}{2}\,a - x.$$

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 148. Когда извѣстна величина Субтангенса, то величина самаго Тангенса опредѣлится помощію Пиѳагоровой Теоремы.

ЗАДАЧА LVIII.

§. 149. *Найти дифференціалъ плоскости, заключающейся между Абсциссою, Ординатою, и кривою линѣею.*

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что Абсцисса x получаетъ приращеніе Δx, Ордината y увеличивается количествомъ Δy, то плоскость получитъ приращеніе $y \Delta x$ вмѣстѣ съ плоскостью, заключающеюся между приращеніями Абсциссы, Ординаты, и кривой линѣи. Сія послѣдняя плоскость больше треугольника $\frac{1}{2} \Delta x \Delta y$, а меньше прямоугольника $\Delta x \Delta y$, слѣдовательно, естьли приращеніе плоскости назовется Δz, то будетъ

$$\Delta z > y \Delta x + \tfrac{1}{2} \Delta y \Delta x; \quad \frac{\Delta z}{\Delta x} > y + \frac{\Delta y}{2}$$

$$\Delta z < y \Delta x + \Delta y \Delta x; \quad \frac{\Delta z}{\Delta x} < y + \Delta y$$

Но когда содержаніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ превратится въ $\frac{dy}{dx}$, тогда разность между $y + \frac{1}{2} \Delta y$ и $y + \Delta y$, то есть, $\frac{1}{2} \Delta y$, уничтожится: слѣдовательно будетъ $\frac{dz}{dx} = y$, $dz = ydx$.

И

И такѣ искомый дифференціалѣ плоскости будетѣ ydx.

ЗАДАЧА IX.

§. 150. *Найти квадратуру кривой линѣи, то есть, изобразить плоскость ея количествами* x *и* y.

РѢШЕНІЕ.

По данному уравненію между x и y, изобрази дифференціалѣ ydx, функціею количествѣ x и dx, безѣ количествѣ y и dy; или функціею количествѣ y и dy, безѣ количествѣ x и dx.

По томѣ найди интегралѣ $\int ydx$, (§. 137.) который представлять будетѣ искомую плоскость.

ПРИМѢРЪ 1.

Вѣ Параболѣ $y^2 = px$, слѣд. $2\,ydy = pdx$; $\frac{2yydy}{p} = ydx$, и потому $\int ydx = \frac{2}{3}\frac{y^3}{p} = \frac{2}{3}xy$, то есть, плоскость Параболы, заключающаяся между Абсциссою, Ординатою, и соотвѣтствующею частію Параболы, составляетѣ двѣ трети прямоугольника изѣ Абсциссы и Ординаты.

ПРИ-

ПРИМѢРЪ 2.

Ежели въ кругѣ Абсциссы начинаются отъ центра, то слѣдующее уравненіе изображаетъ его свойство:

$$y^2 = a^2 - x^2.$$

при чемъ a означаетъ полупоперешникъ. Изъ онаго слѣдуетъ

$$y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$ydx = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

Но $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} -$ и пр. (§. 133.).

Слѣд. $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = adx - \frac{1}{2} x^2 dx - \frac{1}{8} x^4 dx - \frac{1}{16} x^6 dx -$ и пр.

$\int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = ax - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{40} x^5 - \frac{1}{112} x^7 -$ и пр.

Сія безконечная строка изображаетъ плоскость круга, заключающуюся между цѣлымъ Синусомъ, дугою, и ея прямымъ Синусомъ $\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

ЗАДАЧА LX.

§. 151. *Найти дифференціалъ кривой линѣи.*

РѢ-

РѢШЕНІЕ.

Назовемъ дугу или часть кривой линѣи s, и положимъ, что она получаетъ приращеніе Δs, между тѣмъ какъ Абсцисса и Ордината увеличиваются количествами Δx и Δy. Понеже дуга больше хорды, то $\Delta s >$

$$\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}, \text{ и } \frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta x + \Delta y)}} > 1.$$

Но когда разности превратятся въ дифференціалы, тогда будетъ $\frac{ds}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 1$, слѣд. $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

ЗАДАЧА LXI.

§. 152. *Найти длину кривой линѣи.*

РѢШЕНІЕ.

По данному уравненію между количествами x и y, изобрази $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ или $dx \sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dx^2})}$ количествами x и dx, безъ количествъ y и dy, или напротивъ.

По томъ найди интегралъ (§. 137), который будетъ изображать искомую длину кривой линѣи.

ПРИ-

ПРИМѢРЪ.

Положимъ, что $y^3 = ax^2$, то будетъ

$$y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}} x,\ \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} dy = a^{\frac{1}{2}} dx,\ \frac{9}{4} y dy^2 = a dx^2,$$

$$\frac{9y}{4a} dy^2 = dx^2$$

$$\left(1 + \frac{9y}{4a}\right) dy^2 = dy^2 + dx^2$$

$$\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}.$$

Положимъ $1 + \frac{9y}{4a} = \frac{u}{b}$, то будетъ $\frac{9dy}{4a} = \frac{du}{b}$, $dy = \frac{4a}{9b} du$, слѣдовательно

$$\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{4a}{9b} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} du;$$

$$\int\left(1 + \frac{y9}{4a}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{8a}{27b} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{27} a \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} a,$$

такъ что $s = o$, когда $y = o$.

ЛЕМ-

ЛЕММА.

§. 153. *Тангенсъ суммы двухъ круговыхъ дугъ* $T.(a+b) = \frac{Ta + Tb}{1 - Ta.Tb}$, *ежели Синусъ цѣлой* $= 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ Тригонометріи явствуетъ, что Синусъ суммы двухъ дугъ $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$; косинусъ оной суммы $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\cos b$

слѣдовательно

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos.(a+b)} = \frac{\sin a.\cos b + \sin b.\cos a}{\cos a.\cos b - \sin a.\sin b}$$

или раздѣливъ числителя и знаменателя на $\cos a \cos b$.

$$T.(a+b) = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b.}}{1 - \frac{\sin a.\sin b}{\cos a.\cos b}}$$

$$= \frac{Ta + Tb}{1 - Ta.Tb}$$

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 154. Слѣдовательно

$$T.(a-b) = \frac{Ta - Tb}{1 + Ta.Tb}$$

Положимъ $b = y$, $a - b = \Delta y$, $Tb = x$, $Ta - Tb = \Delta x$, то будетъ

$$T \Delta y = \frac{\Delta x}{1 + x^2 + x \Delta x}$$

и когда приращенія или разности превратятся въ дифференціалы, тогда будетъ

$$T\, dy = \frac{dx}{1 + x^2}, \text{ или}$$

$$dy = \frac{dx}{1 + x^2}$$

ЗАДАЧА LXII.

§. 155. *Найти содержаніе окружности къ поперешнику.*

РѢШЕНІЕ.

Раздѣлимъ dx на $1 + x^2$, то выдетъ $dy = dx\,(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \quad)$ и пр. $y = x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x -$ и пр. (§.137)

Положимъ $a + b = 45°$, то будетъ

$$T.\,(a + b) = 1 = \frac{Ta + Tb}{1 - Ta\,Tb}, \text{ слѣд.}$$

$$1 - Ta.\,Tb = Ta + Tb$$

$$1 - Tb = Ta + Ta.\,Tb$$

$$\frac{1 - Tb}{1 + Tb} = Ta$$

Еще положимъ $Tb = \frac{1}{2}$, то будетъ $Ta = \frac{1}{3}$. Слѣдовательно

$$a = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \text{ и пр.}$$

1

$$b = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \text{и пр.}$$

Сумма сихъ двухъ безконечныхъ строкъ составляетъ 45° или $\frac{1}{8}$ долю окружности круга, имѣющаго полупоперешникомъ единицу. Слѣд. окружность къ поперешнику содержится какъ $8 (a + b) : 2 = 4 (a + b) : 1 =$

3, 141592|653989|793238|462643|383279|50: 1.

КОНЕЦЪ.



